2024 május 3.

sima mátrix játék

2 játékos, N tiszta stratégia

$A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ kifizetési mátrix

1. játékos $i \in \{1, \dots, N\}$ választ
2. $j \in \{1, \dots, N\}$

akkor az 1. játékos nyeresége a_{ij}

2. játékos vesztesége $-a_{ij}$

zéró összegű játék

bimátrix játék

2 játékos, N tiszta stratégia

$A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ az 1. játékos kifizetése

$A' \in \mathbb{R}^{N \times N}$ a 2. játékos kifizetése

1. játékos nyeresége a_{ij}
2. — // — a'_{ij}

Ha $A' = -A$ akkor sima mátrix játék

Példa: fogoly dilemma

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$N = 2$

első stratégia tagadás
második bevallás

az első játékos mindig jobban jár ha bevallja, mert

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \wedge & \wedge \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

a második játékos hasonlóan

$$A' = \begin{pmatrix} 3 < 5 \\ 0 < 1 \end{pmatrix}$$

ezért mind a ketten bevalják a bűnüket, de jobb lett volna ha tagadnak.

Általában

$A, A' \in \mathbb{R}^{N\times M}$ kifizetési mátrixok

$X \in \mathbb{R}^N$ az első játékos kevert stratégiája

$X = (x_1, \dots, x_n), \sum x_i = 1$

$x_i \geq 0$

$Y \in \mathbb{R}^M$ a második játékos kevert stratégiája.

Az első játékos várható kifizetése

$$X \cdot A \cdot Y^T$$

másodiké $\quad X \cdot A' \cdot Y^T$

Optimális a stratégia

Minden tiszta X' stratégiára

$X' = (x'_1, \dots, x'_n) \quad x'_i \in \{0,1\}$

$$XAY^T \geq X'AY^T$$

(ebből kijön hogy minden kevert X' stratégiára $XAY^T \geq X'AY^T$)

Hasonlóan a második játékosra

$$XA'Y^T \geq XA'(Y')^T$$

2x2 bimátrix játékok

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$$X = (x, 1-x) \qquad Y = (y, 1-y)$$

várható nyeremény:

$$E_1(x,y) = XAY^T \leftarrow \text{első játékosé}$$

$$E_2(x,y) = XA'Y^T \leftarrow \text{második játékosé}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & E_1(0,y) \le E_1(x,y) \\ (2) & E_1(1,y) \le E_1(x,y) \\ (3) & E_2(x,0) \le E_2(x,y) \\ (4) & E_2(x,1) \le E_2(x,y) \end{array}\right\} \text{ezeket kell megoldani}$$

---

(1) egyenlőtlenség

$$(0,1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \le (x, 1-x) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

$$0 \le \Big(\underbrace{(x, 1-x) - (0,1)}_{(x,-x) = x(1,-1)} \Big) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{x(1,-1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x\,(a-c,\ b-d)\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x(a-c)y + x(b-d)(1-y) \geq 0$$

$$x(a-b-c+d)\,y + x(b-d) \geq 0$$

$$x\Big[\underbrace{(a-b-c+d)}_{Q}\,y - \underbrace{(d-b)}_{q}\Big] \geq 0$$

$$xQy - xq \geq 0$$

ezt vizsgáljuk

② egyenlőtlenség hasonlóan

$$(1-x)Qy - (1-x)q \leq 0$$

Ezt a két egyenlőtlenséget vizsgáljuk csak

$\boxed{\text{1. eset}}$ $\quad Q = 0$

1a) ha $q=0$ akkor $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$

1b) ha $q>0$ akkor $x=0,\ 0 \leq y \leq 1$

1c) ha $q<0$ akkor $x=1,\ 0 \leq y \leq 1$

azt kapjuk meg

$$\left.\begin{aligned} xQy - xq &\geq 0 \\ (1-x)Qy - (1-x)q &\leq 0 \end{aligned}\right.$$

$\boxed{\text{2. eset}}$ $Q > 0$

2a : $x = 0$ $Qy - q \leq 0 \Rightarrow y \leq \frac{q}{Q}$

2b : $x = 1$ $\Rightarrow y \geq \frac{q}{Q}$

2c : $0 < x < 1$ x és $1-x$ is pozitív tehát egyszerűsíthetünk vele

$$\left.\begin{aligned} Qy - q &\geq 0 \\ Qy - q &\leq 0 \end{aligned}\right\} \quad y = \frac{q}{Q}$$

$\boxed{\text{3. eset}}$ $Q < 0$ hasonlóan

3a : $x = 0$, akkor $y \geq \frac{q}{Q}$

3b : $x = 1$, akkor $y \leq \frac{q}{Q}$

3c : $0 < x < 1$ akkor $y = \frac{q}{Q}$

Ez volt az 1 és 2 egyenlőtlenségek analízise. Hasonlóan csináljuk 3 és 4-et.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Q = 3 - 0 - 5 + 1 = -1$

$q = d - b = 1 - 0 = 1$ $\qquad \dfrac{q}{Q} = -1$

$Q < 0$ 3. esetet kell nézni

ha $x = 0$ akkor $y \geq -1$

$x = 1$ $\qquad y \leq -1$

$0 < x < 1$ $\qquad y = -1$

$x = 0$ - nak kell lennie, mert $0 \leq y \leq 1$

$R = 3 - 5 - 0 + 1 = -1$

$r = d' - c' = 1 - 0 = 1$ $\qquad \dfrac{r}{R} = -1$

$R < 0$ 6. eset

ha $y = 0$ akkor $x \geq -1$

$y = 1$ akkor $x \leq -1$

$0 < y < 1$ akkor $x = -1$

$y = 0$ lehetséges csak.

optimális megoldás

$X = (x, 1-x)$

$Y = (y, 1-y)$

$= (0, 1)$

mindkettő második változója

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$Q = 1 - 3 - 4 + 2 = -4$

$q = 2 - 3 = -1$

$\frac{q}{Q} = \frac{1}{4}$

3. eset $Q < 0$

ha $x = 0$ akkor $y \geq 1/4$

$x = 1$ $y \leq 1/4$

$0 < x < 1$ $y = 1/4$

$R = 8 - 2 - 1 + 5 = 10$

$r = 5 - 1 = 4$

$\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$

5. eset $R > 0$

ha $y = 0$ akkor $x \leq 2/5$

$y = 1$ $x \geq 2/5$

$0 < y < 1$ $x = 2/5$

Ha $x = 0 \Rightarrow y \geq 1/4 \Rightarrow x \geq 2/5$ ↯

$x = 1 \Rightarrow y \leq 1/4 \Rightarrow x \leq 2/5$ ↯

$0 < x < 1 \Rightarrow y = 1/4 \Rightarrow x = 2/5$

Várható nyeremény:

$$\underbrace{\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1/4\\ 3/4\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{14}{5}, \frac{12}{5}\right)\begin{pmatrix}1/4\\ 3/4\end{pmatrix} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$$

első játékos nyereménye

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\begin{pmatrix}8 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/4\\ 3/4\end{pmatrix} = \ldots = \frac{19}{5}.$$

Árverések

Angol árverés: minimális kikiáltási ár és lehet emelni az ajánlatot a maximális árat licitáló nyer.

Holland árverés: magas kikiáltási árról indulunk lefelé, és az első aki elfogadja az árat nyer.

Zárt licites árverés: mindenki zárt borítékban beadja az ajánlatát és a legnagyobb ajánlattevő nyer.

Vickrey-aukció: zárt borítékban leadják az ajánlatokat, az nyer aki a legnagyobb ajánlatot tette, de csak annyit fizet mint a második legnagyobb ajánlattevő.

Tétel: Vickrey aukció esetén minden játékos optimális stratégiája az, hogy olyan összeggel licitál, amennyi szerinte az áru értéke.

Biz: a i. játékos szerint az az áru értéke v_i és b_i-vel licitált.

Legyen $z = \max_{j \neq i} b_j$ a többi játékos licitjeinek maximuma. Azt akarjuk megmutatni hogy ha $b_i \neq v_i$ akkor az i. játékos nyeresége nem csökken ha $b_i = v_i$-t választaná.

1. eset: $v_i < b_i$

1a eset $z \leq v_i < b_i$ i. játékos nyert z fizetett nyeresége $v_i - z$

ez a nyereség nem változna ha $b_i = v_i$-t választotta volna.

1b. $v_i < b_i \leq z$ tehát nem az i. játékos nyert, nyeresége 0
ugyanúgy nem nyert volna $b_i = v_i$-vel.

1c eset: $v_i < z < b_i$ az első játékos nyert, de a nyeresége $v_i - z < 0$
ha $v_i = b_i$-t választja, akkor a nyeresége 0 maradt volna.

2. eset $b_i < v_i$

2a eset: $b_i < v_i \leq z$ akkor nem nyerte meg, és ha $b_i = v_i$ választja akkor is 0 maradt volna a nyeresége.

2b eset: $z \leq b_i < v_i$ megnyerte a licitet, nyeresége $v_i - z$ és ez nem változna ha $b_i = v_i$ választotta volna

2c eset: $b_i < z < v_i$ nem nyerte meg, a nyeresége 0, de $b_i = v_i$ választásával a nyeresége $v_i - z > 0$ lenne.

$\blacksquare$

<u>Dollár árverés</u> : hasonló mint az angol árverés, a legnagyobbat licitáló megkapja az árut és fizet érte, de a második is fizet de nem kap semmit.

<u>Kooperatív játékok</u>

<u>Def</u>: $N = \{1, \dots, n\}$ játékosok egy halmaza, $S \subseteq N$ játékosok egy koalíciója minden koalícióra van egy nyereség amit a S-ben levő játékosok nyernek.

$$v : P(N) \to \mathbb{R}$$ <u>karakterisztikus függvény</u>

$v(S)$ az S koalíció nyeresége

Feltesszük, hogy $v(\emptyset) = 0$

(N, v) <u>n-személyes kooperatív játék</u>

38-as Példa:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

Judit Ancsa Fanni

$$v(\emptyset) = 0$$
$$v(\{1\}) = 6$$
$$v(\{1,2\}) = 16$$
$$v(\{1,3\}) = 26$$
$$v(\{2\}) = 0$$
$$v(\{3\}) = 0$$
$$v(\{2,3\}) = 6$$
$$v(\{1,2,3\}) = 36$$

Példa: Választások

$N = \{1, \dots, n\}$ választók halmaza

$A = \{1, \dots, k\}$ alternatívák halmaza

$S \subseteq N$ koalíció ha S-ben mindenki ugyanarra szavaz

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |S| > \frac{n}{2} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Többségi szavazás: az nyer aki a legtöbb szavazatot kapja. Ez jól működik, ha csak két alternatíva között kell választani, mert a nyerő a szavazatok min. 50%-át megkapja.

Probléma: 3 vagy több lehetőség esetén kevés szavazattal is lehet nyerni. Milyen alternatív szavazási lehetőségek vannak?

Feltesszük, hogy minden választónak van preferenciája, pl. $x \succ y \succ z$ (lineáris rendezés az alternatívák között)

Példa: $A = \{x, y, z\}$ alternatívák

1	$x \succ y \succ z$	7	szavazónál
2	$y \succ z \succ x$	4	—//—
3	$z \succ y \succ x$	5	—//—

többségi szavazás: 7 db x, 4 db y, 5 db z

x nyer, de 9 szavazó szerint x a legrosszabb.

Többségi szavazás visszaléptetéssel

többször szavaznak és mindig a legkevesebb szavazatot kapott esik ki.

1	$x \succ y \succ z$	7	szavazónál
2	$y \succ z \succ x$	4	—//—
3	$z \succ y \succ x$	5	—//—

első körben $x:7$, $y:4$, $z:5$

kiesik y.

1	$x \succ z$	7	db
2	$z \succ x$	4	
3	$z \succ x$	5	

második körben $x:7$, $z:9$

tehát z nyer.

Borda pontozásos szavazás:

Mindenki egyszer szavaz és sorrendbe rakja az alternatívákat és ezek $n, n-1, \dots, 1$ pontot kapnak. A legtöbb pontot kapó nyer.

1. $x \succ y \succ z$ 7 szavazónál
2. $y \succ z \succ x$ 4 —//—
3. $z \succ y \succ x$ 5 —//—

Borda szavazás

1. $x : 7\cdot3$, $y : 7\cdot2$, $z : 7\cdot1$
2. $x : 4\cdot1$, $y : 4\cdot3$, $z : 4\cdot2$
3. $x : 5\cdot1$, $y : 5\cdot2$, $z : 5\cdot3$

\+

$x : 30$, $y : 36$, $z : 30$

y nyer.

Condorcet szavazás

Az alternatív párokra többségi szavazást hajtunk végre. Az a győztes, aki minden párosításbeli szavazást megnyer.

$$\left.\begin{array}{lll} x \text{ vs. } y & x : 7 & y : 9 \\ x \text{ vs } z & x : 7 & z : 9 \\ y \text{ vs } z & y : 11 & z : 5 \end{array}\right\} \quad y \text{ nyer}$$

Sajnos nem mindig van nyerő

Def: Egy szavazási rendszer *egyhangú*, ha mindenkinek ugyanaz a preferencia sorrendje, akkor a legjobban preferált nyer (a végső sorrend ez a közös preferencia)

Def: Egy szavazási rendszer *független a lényegtelen alternatíváktól*, ha két alternatíva sorrendje a végeredményben csak attól függ, hogy ez a két alternatíva milyen sorrendben van a szavazatokban

Def: Egy választási rendszerben *van diktátor*, ha a végső sorrend csak a diktátor szavazatától függ.

Tétel (Arrow) Ha legalább három alternatíva közül kell választani és a szavazási rendszer egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól, akkor van benne diktátor.