2024 március 22

2 játékos, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kifizetési mátrix

$X \in \mathbb{R}^{m}$ első játékos kevert stratégiája

$Y \in \mathbb{R}^{n}$ második —//—

játék értéke $XAY^T = v$

Tétel: (Opt. stratégia tétel)

X optimális $\iff$ $v \le X \underbrace{A_{\cdot j}}_{j.\ \text{oszlop}}$

Y optimális $\iff$ $v \ge \underbrace{A_{i \cdot}}_{i.\ \text{sor}} Y$

Köv (kevert vs. tiszta strat)

$x_i > 0 \implies v = A_{i \cdot} Y \longleftarrow (*)$

$y_i > 0 \implies v = X A_{\cdot j}$

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

sorminimumok maximuma 2

oszlopmaximumok minimuma 6

az első játékos min. 2 pontot kaphat

második max 6 pontot veszíthet

$$2 \leq v \leq 6 \quad \text{játék értéke}$$

Tfh. $x_1, x_2, x_3 > 0$

$$\begin{aligned} A_1 \cdot y &= v \qquad & 6y_1 + 4y_2 + 1y_3 &= v \\ A_2 \cdot y &= v \qquad & 0y_1 + 7y_2 + 4y_3 &= v \\ A_3 \cdot y &= v \qquad & 4y_1 + 2y_2 + 8y_3 &= v \\ & & y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

4 változó, 4 egyenlet

első egyenletből kivonjuk a másodikat
második harmadik

$$\begin{aligned} 6y_1 - 3y_2 - 3y_3 &= 0 \\ -4y_1 + 5y_2 - 4y_3 &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$4\times \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad -6\times$$

$$-\frac{1}{9}\times \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & -9 & -6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2/3 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1\times \\ -9\times \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & -9 & -2 \end{array}\right) \leftarrow \cdot \frac{-1}{9}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array}\right) -1\times \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array}\right)$$

optimalna strategija

$$Y = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\right)$$

$$6 \cdot \tfrac{1}{3} + 4 \cdot \tfrac{4}{9} + \tfrac{2}{9} = 2 + \frac{16}{9} + \frac{2}{9} = \boxed{4 = v}$$

Lineáris programozás

lineáris egyenlőtlenség rendszer megoldása plusz egy optimalizáció

Def.: elemi bázistranszformáció

$$
\begin{array}{c|c}
 & \overbrace{v_1 \;\; \dots \;\; v_n}^{\text{oszlopok neve}} \\
\text{sorok neve}\left\{\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{array}\right. & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \vdots & a_{ij}^{*} & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}
\end{array}
$$

1. Kijelölünk egy a_{ij} elemet a mátrixban, ezt hívjuk a generáló elemnek
2. a generáló elem sorának és oszlopának a címkéit megcseréljük azaz itt e_i-t és v_j-t.
3. a generáló elemet lecseréljük a reciprokára $a_{ij} \mapsto \frac{1}{a_{ij}}$
4. a generál elem sorának többi elemét elosztjuk a gen. elemmel $a_{ik} \mapsto \frac{a_{ik}}{a_{ij}}$ $k \neq j$

⑤ a gen. elem oszlopának többi elemét elosztjuk a gen. elem −1-szeresével

$$a_{kj} \mapsto \frac{a_{kj}}{-a_{ij}} \qquad k \neq i$$

⑥ a maradék elemeket

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & \boxed{a_{kl}} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} k \neq i \\ l \neq j \end{matrix}$$

$$a_{kl} \mapsto \frac{a_{ij} \cdot a_{kl} - a_{kj} \cdot a_{il}}{a_{ij}}$$

Példa:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & \boxed{3} \\ 1 & 2^* & -3 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & e_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\frac{2 \cdot 1 - (-2)(-3)}{2} = -2 \qquad \frac{2 \cdot 3 - (-2)(-3)}{2}$$

$$\frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)}{2} = 3$$

Megj.: elemi bázistranszformációval lehet mátrix inverzét is számolni

$$-1\times\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow -\tfrac{1}{2}\times\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-1&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&1/2&-1/2\end{array}\right) -2\times \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&1/2&-1/2\end{array}\right)$$

Ell.: $\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1/2&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ✓

Elemi bázistranszformációval

$$\begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2\\ \hline e_1 & 1^* & 2\\ e_2 & 1 & 0\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc} & e_1 & v_2\\ \hline v_1 & 1 & 2\\ e_2 & -1 & -2^*\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2\\ \hline v_1 & 0 & 1\\ v_2 & 1/2 & -1/2\end{array}$$ ✓

fel kell cserélni a címkék helyét

$$\begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2\\ \hline e_1 & 1 & 2^*\\ e_2 & 1 & 0\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc} & v_1 & e_1\\ \hline v_2 & 1/2 & 1/2\\ e_2 & 1^* & 0\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|cc} & e_2 & e_1\\ \hline v_2 & -1/2 & 1/2\\ v_1 & 1 & 0\end{array}$$

végén csináljuk sor oszlop cserét

$$\begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2\\ \hline v_1 & 0 & 1\\ v_2 & 1/2 & -1/2\end{array}$$ ✓

Def: normál alakú lineáris programozási feladat

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$b \in \mathbb{R}^{m}$ és $b \geq 0$

$c \in \mathbb{R}^{n}$

$$
\begin{aligned}
a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n &\leq b_1 \\
a_{21} y_1 + \dots + a_{2n} y_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} y_1 + \dots + a_{mn} y_n &\leq b_m
\end{aligned}
$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$$

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \to \max$$

Tetszőleges lin. egyenlőtlenség rendszer ilyen alakra hozható

① $\geq$ egyenlőtlenségeket -1-gyel szorozzuk.

② $z = y_1 - y_2$ átalakítással tetszőleges z változót helyettesíthetünk két pozitív változóval.

③ Ha minimalizálni kell, akkor a c-ket -1-el szorozzuk.

Def: primál feladat

$$\begin{array}{c} A\bar{y} \le \bar{b} \\ \bar{y} \ge 0 \\ \hline \bar{c}\bar{y} \to \max \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$y \in \mathbb{R}^{n}$

$\bar{b} \in \mathbb{R}^{m}$

duál feladat

$$\begin{array}{c} \bar{x} A \ge c \\ x \ge 0 \\ \hline \bar{x}\bar{b} \to \min \end{array}$$

$\bar{c} \in \mathbb{R}^{n}$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^{m}$

Tétel (Erős dualitás) Ha a primál feladatnak létezik optimális megoldása akkor a duálisnak is, és a cél érték ugyan az.

Eljárás: normál (primál) alakú lineáris prog megoldása (Szimplex módszer)

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\cdot y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \le b_1 \\ a_{21}\cdot y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 \le b_2 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \\ \hline c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \to \max \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 + a_{11}\cdot y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 = b_1 \\ u_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 = b_2 \\ y_1, y_2, y_3, u_1, u_2 \ge 0 \\ \hline c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \to \max \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & y_2 & y_3 & \\ \hline u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{array}$$

mátrixos alak

ahol

a_{ij}, b_i, c_j

konkrét számok

u_1, u_2, y_1, y_2, y_3 változók.

(1) Ha a c_i értékek mindegyike ≤ 0 akkor a megoldás $\underbrace{u_1 = b_1,\ u_2 = b_2}_{\text{pozitív}}$

$y_1 = y_2 = y_3 = 0$

optimális érték 0.

(2) Ha ez nem így van, akkor van pozitív c_j és vegyünk egy maximális ilyet.

Ha ebben az oszlopban minden $a_{ij} \le 0$ akkor a célfüggvény nem korlátos

<u>Példa</u>

	y_1	y_2	y_3
u_1		-2	
u_2		-1	
maximális	2	3	-1

ekkor y_i akármilyen nagyra választható, az egyenlőtlenségek teljesülnek, és a célfüggvény $3y_2$ lesz.

(3) A kiválasztott c_j oszlopában van pozitív a_{ij} elem.

Ekkor azt az i. sort választjuk ahol

$$\frac{b_i}{c_{ij}} \text{ minimális}$$

Ezzel az elemmel megcsináljuk az elemi bázistranszformációt.

Példa:

$$
\begin{aligned}
y_2 + 3y_3 &\le 1 \\
y_1 + 2y_2 - y_3 &\le 5 \\
2y_1 + y_3 &\le 2 \\
y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \\
\hline
2y_1 + 4y_2 + y_3 &\to \max
\end{aligned}
$$

mátrix alak

$$
\begin{array}{c|ccc|c|c}
 & y_1 & y_2 & y_3 & & \\
\hline
u_1 & 0 & 1^* & 3 & 1 & 1/1 \\
u_2 & 1 & 2 & -1 & 5 & 5/2 \\
u_3 & 2 & 0 & 1 & 2 & \cancel{2/0} \\
\hline
 & 2 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

maximális

$$
\begin{array}{c|ccc|c|c}
 & y_1 & u_1 & y_3 & & \\
\hline
y_2 & 0 & 1 & 3 & 1 & \\
u_2 & 1 & -2 & -7 & 3 & 3/1 \\
u_3 & 2^* & 0 & 1 & 2 & 2/2 \\
\hline
 & 2 & -4 & -11 & -4 &
\end{array}
$$

max

	y_1	u_1	y_3	
y_2	0	1	3	1
u_2	1	−2	−7	3
u_3	2^*	0	1	2
	2	−4	−11	−4

$3/1$

$2/2$

max

<u>Ell</u>:

$y_2 + 3y_3 = 1 \leq 1$

$y_1 + 2y_2 - y_3 = 3 \leq 5$

$2y_1 + y_3 = 2 \leq 2$

$2y_1 + 4y_2 + y_3 = 6$

	u_3	u_1	y_3	
y_2	0			1
u_2	$-1/2$			2
y_1	$1/2$	0	$1/2$	1
	−1	−4	−12	−6

mindegyike negatív

vége az eljárásnak

$u_3, u_1, y_3 = 0$

$y_2 = 1, \; u_2 = 2, \; y_1 = 1$

célfüggvény értéke 6.

Példa (mátrix játék megoldására)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 4y_2 + 1y_3 \leq v \\ 7y_2 + 4y_3 \leq v \\ 4y_1 + 2y_2 + 8y_3 \leq v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Legyen $y_1' = \frac{y_1}{v}$, $y_2' = \frac{y_2}{v}$, $y_3' = \frac{y_3}{v}$

feltesszük hogy $v > 0$

$$6y_1' + 4y_2' + 1y_3' \leq 1$$
$$7y_2' + 4y_3' \leq 1$$
$$4y_1' + 2y_2' + 8y_3' \leq 1$$
$$y_1', y_2', y_3' \geq 0$$

$$y_1' + y_2' + y_3' = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{v} = \frac{1}{v} \Rightarrow \max$$

második játékos v-t minimalizálja

akkor $\frac{1}{v}$-t maximalizálja.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & y_1' & y_2' & y_3' & \\
\hline
u_1 & 6 & 4 & 1 & 1 \\
u_2 & 0 & 7 & 4 & 1 \\
u_3 & 4 & 2 & 8^* & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 8^* & 1 \end{array}}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & y_1' & y_2' & u_3 & \\
\hline
u_1 & 11/2 & 15/4 & -1/8 & 7/8 \\
u_2 & -2 & 6^* & -1/2 & 1/2 \\
y_3' & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\
\hline
 & 1/2 & \frac{3}{4} & -1/8 & -1/8
\end{array}$$

$$\uparrow_{max}$$

$4 \cdot 8 - 1 \cdot 2$

30

$$\frac{7 \cdot 8 - 8}{8}$$

$$\frac{8 \cdot 1 - 1 \cdot 4}{8}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{8}$$

$$\frac{6 \cdot -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{6} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{16} = -\frac{3}{16}$$

? ....