

Szorgalmi feladatok

3. HALMAZOK, LEKÉPEZÉSEK, PERMUTÁCIÓK

- 1. Feladat.** (1 pt.) Mutassa meg, hogy $A \subseteq B$ ekvivalens a következőkkel
- (1) $A \cup B = B$;
 - (2) $A \cap B = A$;
 - (3) $A \setminus B = \emptyset$.
- 2. Feladat.** (1 pt.) Tegyük fel, hogy $A \cup B = C \cup D$ és $A \cap B = C \cap D = \emptyset$. Mutassa meg, hogy ekkor léteznek olyan egyértelműen meghatározott diszjunkt E, F, G, H halmazok, amelyekre $A = E \cup F$, $B = G \cup H$, $C = E \cup G$ és $D = F \cup H$.
- 3. Feladat.** (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy az A, B halmazokhoz pontosan akkor van olyan X halmaz, amelyre $A \setminus X = B$, ha $A \triangle B \subseteq A$
- 4. Feladat.** (0.5 pt.) Fejezze ki a \cap műveletet úgy, hogy csak a \setminus műveletet használja.
- 5. Feladat.** (1 pt.) Fejezze ki az \cup, \cap és \setminus műveleteket a
- (1) \triangle és \cap ;
 - (2) \triangle és \cup ;
 - (3) \triangle és \setminus
- segítségével.
- 6. Feladat.** (1 pt.) Igazolja, hogy $(A_1 \triangle (A_2 \triangle \dots \triangle A_n)) \dots$ pontosan azokból az elemekből áll, amelyek páratlan sok A_i -be tartoznak.
- 7. Feladat.** (1 pt.) Adott 2075 halmaz, melynek mindegyike 46 elemű, és bármely két halmaz uniója 91 elemből áll. Hány elemből áll a 2075 halmaz uniója?
- 8. Feladat.** (1 pt.) Legyen $U = \{1, 2, \dots, n\}$, $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq U$ páronként különböző halmazok, és bármely két különböző i, j indexre az $A_i \cap A_j$ tartalmaz két szomszédos természetes számot U -ból. Bizonyítsa be, hogy $m \leq 2^{n-2}$.
- 9. Feladat.** (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy az $f : A \rightarrow B$ leképezés akkor és csak akkor injektív, ha valahányszor $g : C \rightarrow A$ és $g' : C \rightarrow A$ olyan leképezések, hogy $gf = g'f$, mindannyiszor $g = g'$.
- 10. Feladat.** (1 pt.) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a 9. Feladat analógiáját szürjektív leképezésekre.
- 11. Feladat.** (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy a „Minden szürjektív leképezésnek van balinverze.” állítás ekvivalens a kiválasztási axiómával. (A $g : B \rightarrow A$ leképezés az $f : A \rightarrow B$ balinverze, ha $xgf = x$ minden $x \in B$ esetén.)
- 12. Feladat.** (1 pt.) Mutassa meg, hogy egy folytonos valós ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) függvény (=leképezés) pontosan akkor injektív, ha szigorúan monoton.
- 13. Feladat.** (0.5 pt.) Egy főzőklubról a következőket tudjuk:
- (1) A klub minden tagja főzött már legalább egy klubtagnak.

- (2) A klubtagok sohasem főznek saját maguknak.
- (3) Nincs olyan klubtag, akinek egynél több klubtag főz.
- (4) Van olyan klubtag, akinek senki se főzött.

Hány tagja lehet a főzőklubnak?

14. Feladat. (0.5 pt.) Mutassa meg, hogy ha $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, akkor $|A| = |B|$.

15. Feladat. (1 pt.) Igazolja tetszőleges halmazokra, hogy ha $C \subseteq A$, $B \subseteq D$ és $|C \cup D| = |C|$, akkor $|A \cup B| = |A|$.

16. Feladat. (1 pt.) Adjon meg bijekciót a nemnegatív egész számokból képezhető (végtelen) sorozatok és a 0-1 (végtelen) sorozatok halmazai között.

17. Feladat. (1 pt.) Adjon meg bijekciót a 0, 1, 2 számokból képzett (végtelen) sorozatok és a 0-1 (végtelen) sorozatok halmazai között.

18. Feladat. (1 pt.) Igazolja, hogy a számegyenes tetszőleges diszjunkt nyílt intervallumaiból álló halmaz megszámlálható.

19. Feladat. (1 pt.) Mutassa meg, hogyha S egy olyan ponthalmaz a síkon, melyre igaz, hogy bármely két pontjának távolsága racionális, akkor S megszámlálható.

20. Feladat. (1 pt.) Legkevesebb hány tranzpozíció szorzatára bontható fel a $(12 \dots n)$ ciklus?

21. Feladat. (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy egy permutáció akkor és csak akkor egy ciklus hatványa, ha előáll egyenlő hosszúságú idegen ciklusok szorzataként.

22. Feladat. (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy a következő halmazok elemeiből S_n összes eleme előállítható (permutáció)szorzással (azaz generálják S_n -t):

- (a) $\{(1k) : k = 2, 3, \dots, n\}$;
- (b) $\{(12), (12 \dots n)\}$.

23. Feladat. (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy a következő halmazok elemeiből S_n összes eleme előállítható (permutáció)szorzással (azaz generálják S_n -t):

- (a) $\{(12 \dots n-1), (n-1 n)\}$;
- (b) $\{(12), (23), \dots, (n-1 n)\}$.