Szorgalmi feladatok

2. Logika

1. Feladat. (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy egy n logikai műveletet tartalmazó ítéletkalkulusbeli formulának legfeljebb $2n+1$ részformulája van.

2. Feladat. (0.5 pt.) Egy teniszmagazin a következő szlogennel hirdeti magát: „Ha nem teniszezem, akkor teniszt nézek. És ha nem nézek teniszt, akkor teniszről olvasok.” Feltehetjük, hogy az elbeszélő nem tud a felsoroltak közül több dolgot végezni egyszerre. Ha az állítás igaz, mit csinálhat?

3. Feladat. (0.5 pt.) Egy játékban négyféle díjat lehet kapni. A játékosnak mondani kell egy állítást, ha igaz, akkor az 1. vagy a 2. díjat kapja, ha hamis, akkor a 3. vagy a 4. díjat. Milyen állítást mondjon a játékos, hogy biztosan a 3. díjat kapja?

4. Feladat. (0.5 pt.) Anna, Betti és Cili ikertestvérek. Anna és Betti mindig hazudik, Cili mindig igazat mond. Csak egyetlen kérdést tehet fel az egyiküknek, amelyre igennel vagy nemmel válaszolhat. Fel tud tenni olyan három szóból álló kérdést, amelyből kiderül, hogy a megkérdezett Anna-e?

5. Feladat. (1 pt.) Antal és Béla ikertestvérek, az egyikük mindig hazudik, a másik mindig igazat mond. Ha ki szeretné deríteni, hogy melyikük Antal, akkor fel tud-e tenni egy olyan három szóból álló kérdést, amelyre csak igennel vagy nemmel felelhet a megkérdezett? (Arra nem kíváncsi, hogy melyik az igazmondó.)

6. Feladat. (1 pt.) Antal és Béla ikertestvérek, az egyikük mindig hazudik, a másik mindig igazat mond. Ha ki szeretné deríteni, hogy Antal az igazmondó vagy a hazug, akkor fel tud-e tenni egy olyan három szóból álló kérdést, amelyre csak igennel vagy nemmel felelhet a megkérdezett?

7. Feladat. (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy minden ítéletkalkulusbeli formula ekvivalens egy olyan fomulával, amely csak a $\downarrow$ műveletet tartalmazza, ahol $A \downarrow B \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$. (Ezt úgy mondjuk, hogy a $\{\downarrow\}$ halmaz *funkcionálisan teljes.*)

8. Feladat. (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy nincs más egyelemű, ömagában funcionálisan teljes kétváltozós logikai művelet, mint a $\downarrow$ (ld. 7. Feladat) és az $\uparrow$, ahol $A \uparrow B \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$.

9. Feladat. (1 pt.) Jelölje $\mathbb{I}$ azt a háromváltozós logikai műveletet, melyre $\mathbb{I}(A, B, C)$ pontosan akkor igaz, ha a válozók közül pontosan egy igaz. Igazolja, hogy nincsenek olyan $\circ$ és $\triangle$ kétváltozós műveletek, melyekre $(A \circ B) \triangle C \equiv \mathbb{I}(A, B, C)$.

10. Feladat. (1 pt.) Jelölje **i** az igaz, **h** pedig a hamis logikai konstanst, és jelölje $+$ a kétváltozós kizáró vagy műveletet. Bizonyítsa be, hogy a

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{h}, \neg, \leftrightarrow, +\}$$

halmaz nem funkcionálisan teljes (ld. 7. Feladat).

11. Feladat. (1 pt.) Adott φ és ψ ítéletkalkulusbeli formulák alapján jelölje $\varphi \sqsubset \psi$ azt, ha $\models \varphi \to \psi$ és $\not\models \psi \to \varphi$ teljesül. Adjon meg olyan σ formulát, melyre $\varphi \sqsubset \sigma \sqsubset \psi$.

12. Feladat. (1 pt.) Tekintsük a 11. Feladatban bevezett $\sqsubset$ relációt.

(1) Adjon meg olyan $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ formulákat, melyekre

$$\varphi_1 \sqsubset \varphi_2 \sqsubset \varphi_3 \sqsubset \ldots .$$

(2) Mutassa meg, hogy ha φ és ψ nem következnek egymásból, akkor létezik olyan σ formula, melyre $\varphi, \psi \sqsubset \sigma$.

13. Feladat. (1 pt.) Megfelelően megválasztott elsőrendű nyelven formalizálja a következő ítéletet:

Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka farkú szarka farka tarka.

14. Feladat. (0.5 pt.) Tekintsük az F és G predikátumkalkulusbeli formulákat (f függvényjel, e individuum konstans)

$$F = (\forall x)(\exists y)(f(x,y) = e), \qquad G = (\exists y)(\forall x)(f(x,y) = e).$$

Igazolja, hogy az F és G formulák nem ekvivalensek.

15. Feladat. (0.5 pt.) Igazolja a következőket:

(1) $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \not\models (\forall x)(A(x)) \vee (\forall x)(B(x))$,
(2) $(\exists x)(A(x)) \wedge (\exists x)(B(x)) \not\models (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$.