MTN212: Logikai alapok

(előadásvázlat, 2019. február 11.)

Maróti Miklós

1. Ítéletkalkulus

1. Definíció. Ítéletnek nevezünk egy olyan állítást (kijelentő mondatot), amely vagy igaz vagy hamis, de a kettő egyidejűleg nem teljesülhet. Ha az ítélet igaz (vagy hamis), akkor azt mondjuk hogy az ítélet logikai értéke vagy igazságértéke igaz (vagy hamis). Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

2. Példa. Az alábbi mondatok közül A és B ítélet, de C és D nem az.

A: A Föld a Nap körül kering.
B: Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.
(Ez az úgynevezett Goldbach-sejtés, amiről nem tudjuk hogy igaz-e.)
C: Miért kering a Föld a Nap körül?
D: Most nem mondok igazat.
(Ez az állítás se igaz, se hamis nem lehet, mert ellentmondana önmagának.)

3. Példa. A köznapi nyelvben és a matematikában is kötőszavak segítségével képezhetünk ítéletekből újabb ítéleteket:

F: Ha süt a nap, akkor kimegyek az uszodába.
G: Kimegyek az uszodába, és süt a nap.
H: Nem süt a nap.
I: Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.
J: Kimegyek az uszodába, vagy süt a nap.
K: Akkor és csak akkor süt a nap, ha kimegyek az uszodába.

4. Definíció. Tetszőleges A, B ítéletre definiáljuk az alábbi összetett ítéleteket:

(1) A negációja a „nem A” ítélet, melynek jele $\neg A$;
(2) A, B konjunkciója az „A és B” ítélet, melynek jele $A \wedge B$;
(3) A, B diszjunkciója az „A vagy B” ítélet, melynek jele $A \vee B$;
(4) A, B implikációja a „ha A, akkor B” ítélet, melynek jele $A \to B$;
(5) A, B ekvivalenciája az „akkor és csak akkor A, ha B” ítélet, melynek jele $A \leftrightarrow B$.

Ha egy ítélet nem bontható fel összetett ítéletre, akkor prímítéletnek nevezzük.

5. Definíció. Az előző definicióban bevezetett öt logikai művelet művelettáblázatai a következők, amely segítségével összetett ítéletek logikai értéke kiszámítható:

A	$\neg A$
h	**i**
i	**h**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
h	**h**	**h**	**h**	**i**	**i**
h	**i**	**h**	**i**	**i**	**h**
i	**h**	**h**	**i**	**h**	**h**
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**

6. Példa. A mindennapi életben a „vagy” kötőszót kétféle értelemben is szokás használni.

L: Kávét hoz, vagy álmos. (megengedő vagy: akár mind a kettő megtörténthet.)
M: Gyalog megy, vagy biciklizik. (kizáró vagy: csak az egyik történhet meg.)

Az „A kizáró vagy B” ítélet alatt igazából az $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ ítéletet értjük, és nem vezetük be új logikai műveletet.

7. Példa. A „csak akkor A, ha B”, „B szükséges feltétele A-nak”, „A elegendő feltétele B-nek” és „ha A, akkor B” ítéletek mind ugyan azt jelentik, ahogy ezt a következő ítéletek mutatják:

N: Csak akkor megyek az uszodába, ha süt a nap.
O: A napsütés szükséges feltétele az uszodába menésnek.
P: Az uszodába menés elegendő feltétele a napsütének.

Q: Ha megyek az uszodába, akkor süt a nap.

8. Definíció. Ítéletváltozónak nevezzük az olyan változókat, amelyek ítéleteket jelölnek. Az ítéletkalkulus formulái a következők:

(1) az ítéletváltozók mindegyike formula;
(2) ha F, G formula, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ mindegyike formula; és
(3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

9. Definíció. Azt mondjuk, hogy a G formula részformulája az F formulának, ha G fellép az F előző definícióban leírt előállítása során.

10. Példa. Minden ítélet formalizálható egy ítéletkalkulusbeli formulával, amelyben a ítéletváltozók a prímítéleteket jelöli. Például a következő ítéletek

R: Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.
S: Ha nem süt a nap, nem megyek ki az uszodába.
T: Nem fordulhat elő, hogy kimegyek az uszodába és nem süt a nap.

egy lehetséges formalizálása a következő: $R = A \to B$, $S = (\neg B) \to (\neg A)$, $T = \neg\big((A \wedge (\neg B))\big)$, ahol az A és B ítéletváltozók a „Kimegyek az uszodába" és „Süt a nap" prímítéleteket jelöli.

11. Definíció. Ha adott az ítéletváltozók igazságértéke, akkor a formula igazságértéke a formula felépítése alapján a logikai műveletek segítségével mindig kiszámítható. Ha az ítéletváltozók minden lehetséges értékére a formula igazságértékét kiszámoljuk, akkor megkapjuk a formula igazságtáblázatát.

12. Példa. A 10. példa T formulájának igazságtáblázata (utolsó oszlop) a felépítése alapján kiszámolva:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge (\neg B))$
h	**h**	**i**	**h**	**i**
h	**i**	**h**	**h**	**i**
i	**h**	**i**	**i**	**h**
i	**i**	**h**	**h**	**i**

13. Definíció. Az F és G formulák logikailag ekvivalensek, ha a bennük szereplő ítéletváltozók tetszőleges igazságértékére a formulák igazságértéke megegyezik (azaz a formulák igazságtáblazata megegyezik). Ekkor ezt úgy jelöljük, hogy $F \equiv G$. Egy F formulát tautológiának hívunk, ha igazságértéke mindig igaz, azaz $F \equiv \mathbf{i}$, és kontradikciónak nevezünk, ha $F \equiv \mathbf{h}$.

14. Tétel. Igazak a következő logikai ekvivalenciák.

$\wedge$, $\vee$ alaptulajdonságai:

$$A \wedge A \equiv A, \qquad A \vee A \equiv A, \qquad \text{(idempotencia)}$$
$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \qquad A \vee B \equiv B \vee A, \qquad \text{(kommutativitás)}$$
$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \qquad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), \qquad \text{(asszociativitás)}$$
$$A \wedge (A \vee B) \equiv A, \qquad A \vee (A \wedge B) \equiv A, \qquad \text{(abszorptivitás)}$$
$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \qquad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \qquad \text{(disztibutivitás)}$$

$\neg$ alaptulajdonsága:

$$\neg(\neg A) \equiv A, \qquad \text{(dupla tagadás)}$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), \qquad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B) \qquad \text{(De Morgan szabályok)}$$

i és **h** alaptulajdonságai:

$$A \wedge (\neg A) \equiv \mathbf{h}, \qquad A \vee (\neg A) \equiv \mathbf{i},$$
$$A \wedge \mathbf{i} \equiv A, \qquad A \vee \mathbf{i} \equiv \mathbf{i},$$
$$A \wedge \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}, \qquad A \vee \mathbf{h} \equiv A,$$
$$\mathbf{i} \to A \equiv A, \qquad \mathbf{h} \to A \equiv \mathbf{i},$$
$$A \to \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, \qquad A \to \mathbf{h} \equiv \neg A,$$

$\to$ és $\leftrightarrow$ alaptulajdonságai:

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B, \qquad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A),$$
$$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A), \qquad A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A,$$
$$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C, \qquad (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C),$$
$$A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C), \qquad (A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C).$$

15. Tétel. Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

16. Tétel. Ha két formula logikailag ekvivalens, akkor a bennük szereplő ítéletváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítve újra logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

17. Következmény. Minden formula logikailag ekvivalens egy olyan formulával, amelyben csak negáció, konjunkció (és diszjunkció) szerepel.

18. Tétel. Legyen F olyan formula, amelyben csak konjunkció, diszjunkció és negált illetve negálatlan ítéletváltozó szerepel. Legyen F^* az a formula, amelyet az F-ből úgy kapunk, hogy

(1) minden $\vee$ jelet $\wedge$-re cserélünk,
(2) minden $\wedge$ jelet $\vee$-re cserélünk,
(3) minden A negálatlan ítéletváltozót $\neg A$-ra cserélünk, és
(4) minden $\neg A$ negált ítéletváltozót A-ra cserélünk.

Ekkor $\neg F \equiv F^*$.

19. Példa. Legyen $F = A \wedge (B \vee \neg C)$. Ekkor $\neg F \equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$. Figyelem, fontos, hogy csak ítéletváltozók lehetnek negálva az F formulában. Például ha $F = A \wedge \neg(B \vee \neg C)$, akkor $\neg F \not\equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$, hanem $\neg F \equiv \neg A \vee (B \vee \neg C)$.

20. Definíció. Az F formulát diszjunktív normálformának nevezünk, ha $F = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_t$ alakú, ahol $K_1, \ldots, K_t$ mindegyike változóknak vagy változók negáltjainak konjunkciója. Az $A_1, \ldots, A_n$ változókból felépített diszjunktív normálforma teljes, ha $K_1, \ldots, K_t$ páronként különböző n-tagú konjunkciók, amelyekben az $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlanul.

21. Tétel. Minden formulához létezik vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott.

2. Predikátumkalkulus

22. Definíció. Predikátumnak nevezzük az olyan függvényt vagy kifejezést, amelybe alkalmas objektumokat behelyettesítve ítéletet kapunk. A predikátum változóit individuumváltozóknak, a behelyettesíthető objektumok nemüres összességét individuumtartománynak nevezzük. A predikátumokat az ítéletekhez hasonlóan nagy betűkkel jelöljük, de zárójelben feltüntetjük az individuumváltozóit. Az ítéleteket nullváltozós predikátumoknak tekintjük.

23. Példa. Az egész számok halmazán a következő kifejezések predikátumok:

(1) $O(x, y)$: „x osztója y-nak”,
(2) $P(x)$: „az x szám prím”,
(3) $F(x)$: „az x szám felbonthatatlan”,
(4) $M(x, y, z)$: „az x és y számok szorzata z”.

24. Definíció. Tetszőleges A ítéletre és x individuumváltozóra definiáljuk az alábbi ítéleteket:

(1) „minden x-re A”, melynek neve univerzális kvantifikáció és jele $(\forall x)A$;
(2) „létezik x, hogy A”, melynek neve egzisztenciális kvantifikáció és jele $(\exists x)A$.

25. Példa. Minden ítélet, amely egy adott individuumtartomány elemeiről állít valamit, formalizálható. Például az előző példa predikátumait felhasználva a következő ítéleteket formalizáljuk:

(1) „tetszőleges a, b, c egész számokra ha $a \mid b$ és $b \mid c$ akkor $a \mid c$”

$$(\forall a, b, c)\big((O(a,b) \wedge O(b,c)) \to O(a,c)\big);$$

(2) „az a szám akkor és csak akkor osztója b-nek, ha létezik olyan c egész szám, hogy $ac = b$”

$$O(a,b) \leftrightarrow (\exists c)(M(a,c,b));$$

(3) „minden prímszám felbonthatatlan”

$$(\forall a)(P(a) \to F(a)).$$

26. Definíció. Függvénynek nevezzük az olyan kifejezést, amelybe az individuumtartomány elemeit behelyettesítve az individuumtartomány egy újabb elemét kapjuk. A nullaváltozós függvényeket individuumkonstansoknak nevezzük.

27. Példa. Az egész számok halmazán a következő kifejezések függvények:

(1) $x \cdot y$: „x és y szorzata”,
(2) $\mathrm{lnko}(x, y)$: „x és y (pozitív) legnagyobb közös osztója”,
(3) $\ln(x)$: „az x szám természetes alapú logaritmusa”,
(4) 1: „az 1 konstans”.

28. Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a $\forall$ kvantor után általában implikációt, a $\exists$ kvantor után pedig ést használunk, ahogy ezt a „minden politikus hazug” $(\forall x)(P(x) \to H(x))$ és a „létezik olyan politikus, aki hazug” $(\exists x)(P(x) \wedge H(x))$ ítéletek formalizálásai mutatják.

29. Definíció. Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ és a predikátumjelek $\mathcal{P}$ halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát (aritását). Ekkor a predikátumkalkulus (első rendű nyelv) kifejezései a következők:

(1) az individuumváltozók mindegyike kifejezés;
(2) ha $t_1, \ldots, t_n$ kifejezések és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is kifejezés; és
(3) minden kifejezés az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

A predikátumkalkulus (első rendű nyelv) formulái a következők:

(1) ha $t_1, \ldots, t_n$ kifejezések és $P \in \mathcal{P}$ n-változós predikátumjel, akkor $P(t_1, \ldots, t_n)$ prímformula;
(2) ha F, G formulák és x individuumváltozó, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $((\forall x)F)$, $((\exists x)F)$ mindegyike összetett formula; és
(3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

30. Példa. Tartalmazza $\mathcal{F} = \{\cdot\}$ a szokásos 2-változós szorzás függvényjelet és $\mathcal{R} = \{=\}$ a szokásos 2-változós egyenlőség predikátumjelet. Ekkor az számelméletnél bevezetett oszthatóságra vonatkozó definiciókat és állításokat mind formalizálhatjuk. Például a „tetszőleges a, b, c egészekre ha a osztja b-t és b osztja c-t, akkor a osztja c-t” ítélet egy lehetséges formalizálása a következő:

$$(\forall a, b, c)\big(((\exists x)(a \cdot x = b) \wedge (\exists x)(b \cdot x = c)\big) \to (\exists x)(a \cdot x = c)\big).$$

31. Definíció. A formulák felépítése során fellépő $(\forall x)F$ és $(\exists x)F$ alakú részformuláknál F-et a kvantor hatáskörének hívjuk. Ekkor az x individuumváltozó F-beli előfordulásait kötöttnek nevezzük, minden nem kötött előfordulást szabadnak nevezünk. Egy formula szabad változói alatt a szabadon előforduló változók halmazát értjük. Egy formula zárt, ha nincs szabad változója.

32. Példa. Az

$$(\forall x)\big((\exists y)(x \cdot y = z) \to (x = y)\big)$$

formulában a z változó szabadon fordul elő, az y változó kétszer fordul elő, először kötötten majd szabadon, az x változó szintén kétszer fordul elő, mindkettőször kötötten. Tehát a formula szabad változói y és z. A y változó kötött előfordulására úgy gondolunk, mint ha az teljesen különböző lenne a szabad előfordulástól, és a változó átnevezésével ez egyértelművé is tehető:

$$(\forall x)\big((\exists t)(x \cdot t = z) \to (x = y)\big).$$

33. Definíció. Azt mondjuk, hogy az F és G formulák logikailag ekvivalensek, és azt írjuk hogy $F \equiv G$, ha tetszőleges individuumtartományon tetszőlegesen kiválasztva a függvényjelek és predikátumjelek interpretációját a formulák által meghatározott $F(x_1, \ldots, x_n)$ és $G(x_1, \ldots, x_n)$ predikátumok megegyeznek. Egy F formulát tautológiának hívunk, ha tetszőleges interpretáció esetén igaz, jelölésben: $\models F$.

34.* Tétel. Legyenek F, G tetszőleges formulák, H pedig olyan formula, melynek x nem szabad változója. Ekkor teljesülnek az alábbi logikai ekvivalenciák

$$\begin{aligned}
(\forall x)(\forall y)F &\equiv (\forall y)(\forall x)F, & (\exists x)(\exists y)F &\equiv (\exists y)(\exists x)F,\\
\neg(\forall x)F &\equiv (\exists x)(\neg F), & \neg(\exists x)F &\equiv (\forall x)(\neg F),\\
(\forall x)(F \wedge G) &\equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G, & (\exists x)(F \vee G) &\equiv (\exists x)F \vee (\exists x)G,\\
(\forall x)H &\equiv H, & (\exists x)H &\equiv H.
\end{aligned}$$

35.* Tétel. Ha egy formula részformuláját egy vele logikalilag ekvivalens formulával kicseréljük, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

36. Megjegyzés. Az ítéletkalkulussal ellentétben nincs algoritmus annak eldöntésére, hogy két formula logikailag ekvivalens-e, mert minden individuumtartományt és minden interpretációt meg kellene nézni.

37.* Tétel. Legyen F olyan formula, amelyben csak univerzális kvantor, egzisztenciális kvantor, konjunkció, diszjunkció és negált illetve negálatlan prímformula szerepel. Legyen F^* az a formula, amelyet az F-ből úgy kapunk, hogy

(1) minden $\forall$ jelet $\exists$-re cserélünk,
(2) minden $\exists$ jelet $\forall$-re cserélünk,
(3) minden $\vee$ jelet $\wedge$-re cserélünk,
(4) minden $\wedge$ jelet $\vee$-re cserélünk,
(5) minden A negálatlan prímformulát $\neg A$-ra cserélünk,
(6) minden $\neg A$ negált prímformulát A-ra cserélünk, és
(7) minden kifejezést meghagyunk a prímformulákban.

Ekkor $\neg F \equiv F^*$.