MTN212: Halmazok, leképezések

(előadásvázlat, 2019. február 19.)

Maróti Miklós

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, és $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát.

1. Halmazok

1. Megjegyzés. A halmaz és a halmaz eleme alapfogalmak, nem definiáljuk. Az $a \in A$ jelölést használjuk annak kifejezésére, hogy a eleme A-nak. A $\neg(a \in A)$ formula helyett $a \notin A$-t írunk. Megjegyezzük, hogy egy elem nem lehet többször eleme egy halmaznak, azaz csak az számít, hogy az adott elem eleme-e a halmaznak vagy sem. A halmazelmélet axiomatikus felépítésében csak azt tesszük fel, hogy $\in$ kétváltozós predikátumjel, és az individuumtartományunk a halmazok összessége.

2. Definíció. Ha az A és B halmazoknak ugyanazok az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy egyenlők, és azt írjuk, hogy $A = B$. Ha A minden eleme B-nek is eleme, azaz $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy A részhalmaza B-nek, és azt írjuk hogy $A \subseteq B$. Az A halmaz valódi részhalmaza B-nek, amelyet $A \subset B$-vel jelölünk, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

3. Definíció. Azt a halmazt, melynek nincsen eleme, üreshalmaznak nevezzük és $\emptyset$-el jelöljük, azaz $\neg(\exists x)(x \in \emptyset)$ teljesül.

4. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

(1) $A \subseteq A$ és $\emptyset \subseteq A$;
(2) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$;
(3) $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

5. Definíció. Legyenek $a_1, \dots, a_n$ nem feltétlen különböző elemek. Ekkor $\{a_1, \dots, a_n\}$ azt az A halmazt jelöli, amelynek pontosan $a_1, \dots, a_n$ az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow (x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n))$.

6. Példa. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{1, 2\}; \quad B = \{1, 3-1\}; \quad C = \{1, 1, 2\}; \quad D = \{\emptyset, 1, 2\}; \quad E = \{\{1\}, 2\}; \quad F = \{\{1, 2\}\}.$$

Ekkor $A = B = C$, a többi mind különböző. D-nek három, F-nek egy eleme van, a többinek kettő. $\{1\}$ részhalmaza A, B, C és D-nek, de E és F-nek nem. $\{1\}$ csak E-nek eleme, a többinek nem.

7. Definíció. Legyen F olyan formula, melynek csak x a szabad változója. Ekkor $\{\, x : F \,\}$ azt az A halmazt jelöli, amelyre $(\forall x)(F \leftrightarrow x \in A)$ teljesül. Ha nem világos, hogy x milyen U individuumtartomány eleme lehet, akkor az $\{\, x \in U : F \,\}$ jelölést használjuk. Formula helyett sokszor csak szöveges predikátumot írunk amelyet megfelelően lehetne formalizálni.

8. Példa. A következő halmazok mind egyenlők: $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{\, x \in \mathbb{N} : x \mid 6 \,\}$, $\{\, x \in \mathbb{Z} : x \geq 1 \text{ és } x \mid 6 \,\}$, $\{\, \text{hat pozitív osztói} \,\}$.

9. Definíció. Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk az egyesítésüket és metszetüket:

$$A \cup B = \{\, x : x \in A \vee x \in B \,\}, \qquad A \cap B = \{\, x : x \in A \wedge x \in B \,\}.$$

Azt mondjuk, hogy A és B diszjunktak, ha $A \cap B = \emptyset$.

10. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

$$\begin{array}{lll} A \cup \emptyset = A, & A \cap \emptyset = \emptyset, & \\ A \cup A = A, & A \cap A = A, & \text{(idempotencia)} \\ A \cup B = B \cup A, & A \cap B = B \cap A, & \text{(kommutativitás)} \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), & \text{(asszociativitás)} \\ (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \text{(abszorptivitás)} \\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). & \text{(disztibutivitás)} \end{array}$$

11. Definíció. Legyen rögzítve egy U univerzum. Ekkor tetszőleges $A \subseteq U$ halmazra definiáljuk az A komplementerét:

$$\overline{A} = \{ x \in U : x \notin A \}.$$

12. Tétel. Tetszőleges $A, B \subseteq U$ halmazokra

$$\begin{array}{lll} & \overline{\overline{A}} = A, & \text{(dupla tagadás)} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, & \text{(De Morgan szabályok)} \\ A \cap \overline{A} = \emptyset, & A \cup \overline{A} = U, & \\ A \cap U = A, & A \cup U = U. & \end{array}$$

13. Definíció. Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a különbségüket és szimmetrikus különbségüket:

$$A \setminus B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}, \qquad A \triangle B = \{ x : x \in A \leftrightarrow x \notin B \}.$$

14.* Tétel. Tetszőleges $A, B \subseteq U$ halmazokra $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ és $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

15. Definíció. Tetszőleges a, b elemekre definiáljuk az (a, b) rendezett elempárt. Az (a, b) rendezett elempárnak a és b az első, illetve a második koordinátája. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlők.

16. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra definiáljuk a Descartes-szorzatukat:

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \wedge b \in B \}.$$

17. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ hatelemű halmaz. Vegyük észre, hogy $\emptyset \times B = \emptyset$, mert ha (a, b) eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor $a \in \emptyset$ lenne, ami nem lehet.

18. Definíció. Tetszőleges A halmaz esetén az A összes részhalmazainak halmazát az A hatványhalmazának nevezzük és $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{ X : X \subseteq A \}.$$

19. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ háromelemű halmaz hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

8-elemű. Az üreshalmaznak csak az üreshalmaz a részhalmaza, ezért $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, azaz egy olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üreshalmaz. Gondoljuk át, hogy $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. Megfeleltetések és leképezések

20. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra az $A \times B$ halmaz részhalmazait A-ból B-be menő megfeleltetéseknek nevezzük. Az A halmazt a megfeleltetés indulási halmazának, B-t pedig az érkezési halmazának nevezzük.

21. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ halmazból a $B = \{3, 4, 5\}$ halmazba menő megfeleltetések pontosan a $P(A \times B)$ elemei, azaz $2^6 = 32$ van belőlük. Például az $\emptyset$ is megfeleltetés A-ból B-be, ebből látható, hogy a megfeleltetés megadásakor mindig meg kell adni az érkezési és indulási halmazokat is.

22. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés értelmezési tartománya az $\{\, a \in A : (\exists b \in B)((a,b) \in \varrho) \,\}$, értékkészlete pedig a $\{\, b \in B : (\exists a \in A)((a,b) \in \varrho) \,\}$ halmazok.

23. Példa. Vegyük a $\varrho = \{\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2 \,\}$ megfeleltetést a valós számokon. Ekkor ϱ értelmezési tartománya $\mathbb{R}_0^+$, az értékkészlete pedig $\mathbb{R}$.

24. Jelölés. A megfeleltetéseket négyféleképpen ábrázolhatjuk: 1) koordinátarendszerben berajzoljuk azokat a pontokat, melyek meg vannak feleltetve egymásnak, 2) felrajzolhatjuk az indulási és érkezési halmazokat az elemeikkel, és a megfeleltetett elemeket nyíllal összekötjük, 3) ha az érkezési és indulási halmazok megegyeznek, akkor egy irányított gráf éleivel jelöljük a megfeleltetett elemeket, 4) egy $0,1$ mátrixszal, melynek sorai az indulási, oszlopai pedig az érkezési halmaz elemeit jelöli.

25. Definíció. Minden $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetésre definiáljuk az inverzét:

$$\varrho^{-1} = \{\, (b,a) \in B \times A : (a,b) \in \varrho \,\}.$$

Vegyük észre, hogy $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

26. Definíció. Ha a $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés érkezési halmaza megegyezik a $\sigma \subseteq B \times C$ megfeleltetés indulási halmazával, akkor definiáljuk a $\varrho\sigma \subseteq A \times C$ szorzatukat:

$$\varrho\sigma = \{\, (a,c) \in A \times C : (\exists b \in B)((a,b) \in \varrho \wedge (b,c) \in \sigma) \,\}.$$

27. Példa. Vegyünk emberek egy E halmazát és rajtuk a $\sigma = \{\, (x,y) \in E \times E : x \text{ szülője } y\text{-nak} \,\}$ megfeleltetést. Ekkor $\sigma\sigma$ a „nagyszülő”, $\sigma^{-1}\sigma$ pedig a „egyenlő, testvér vagy féltestvér” megfeleltetést adja.

28. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés parciális leképezés, ha minden $a \in A$ elemre legfeljebb egy olyan $b \in B$ elem létezik, hogy $(a,b) \in \varrho$. Ilyenkor a $\varrho\colon A \to B$ jelölés használjuk, ami azt jelenti, hogy ϱ parciális leképezés A-ból B-be. Továbbá $(a,b) \in \varrho$ helyett azt mondjuk hogy az a elem ϱ melletti képe b, és azt írjuk, hogy $a\varrho = b$ vagy $\varrho(a) = b$. A parciális leképezést leképezésnek nevezzük, ha minden $a \in A$ elemre pontosan egy vele megfeleltetett $b \in B$ elem létezik.

29. Példa. A 23. példában megadott megfeleltetés nem parciális leképezés, mivel mind $(4,2)$, mind $(4,-2)$ is eleme ϱ-nak. Viszont a $\varrho \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ megfeleltetés $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}_0^+$-ba már parciális leképezés de még mindig nem leképezés, mivel a -1 elemnek nincsen képe. A $\varrho \cap (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ megfeleltetés viszont már leképezés.

30. Példa. Minden leképezés elempárok halmaza. Vegyük például az $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ halmazon az abszolútérték függvényt. Ekkor ez leképezés amely egyenlő a $\{(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2)\}$ halmazzal.

31. Tétel. Ha $\varrho\colon A \to B$ és $\sigma\colon B \to C$ leképezések, akkor $\varrho\sigma\colon A \to C$ is leképezés és tetszőleges $a \in A$ elemre $a(\varrho\sigma) = (a\varrho)\sigma$.

32. Definíció. Tetszőleges A halmazon definiáljuk az identikus leképezést:

$$\mathrm{id}_A = \{\, (a,b) \in A \times A : a = b \,\}.$$

33. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$ leképezésre $\mathrm{id}_A\, \varrho = \varrho$ és $\varrho\, \mathrm{id}_B = \varrho$.

34. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$, $\sigma\colon B \to C$ és $\tau\colon C \to D$ leképezésekre $(\varrho\sigma)\tau = \varrho(\sigma\tau)$, azaz a szorzás asszociatív.

35. Példa. Vegyük az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ és $\sigma = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$ leképezéseket. Ekkor $\varrho\sigma = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ és $\sigma\varrho = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, azaz a szorzás nem kommutatív.

36. Definíció. A $\varrho\colon A \to B$ leképezés szürjektív (vagy ráképezés), ha minden elem előfordul képelemként, azaz ha

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varrho = b).$$

A $\varrho\colon A \to B$ leképezés injektív (vagy kölcsönösen egyértelmű), ha különböző elemek képe különböző, azaz ha

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varrho = a_2\varrho \to a_1 = a_2).$$

A ϱ leképezés bijektív (vagy kölcsönösen egyértelmű ráképezés), ha szürjektív és injektív is.

37. Tétel. A $\varrho\colon A \to B$ leképezésnek az inverze akkor és csak akkor leképezés, ha ϱ bijektív.

38. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$ és $\sigma\colon B \to C$ leképezésekre

(1) ha ϱ és σ szürjektív, akkor $\varrho\sigma$ is szürjektív;
(2) ha ϱ és σ injektív, akkor $\varrho\sigma$ is injektív;
(3) ha ϱ és σ bijektív, akkor $\varrho\sigma$ is bijektív;
(4) ha $\varrho\sigma$ szürjektív, akkor σ szürjektív;
(5) ha $\varrho\sigma$ injektív, akkor ϱ injektív; és
(6) ha $\varrho\sigma$ bijektív, akkor ϱ injektív és σ szürjektív.

39. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$, $\sigma\colon B \to C$ bijektív leképezésre

(1) ϱ^{-1} is bijektív,
(2) $\varrho\varrho^{-1} = \mathrm{id}_A$,
(3) $\varrho^{-1}\varrho = \mathrm{id}_B$,
(4) $(\varrho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\varrho^{-1}$.

40. Definíció. Az A halmazból B-be menő összes leképezés halmazát B^A-val jelöljük. Az A-ból A-ba menő összes bijektív leképezés halmazát $\mathrm{Sym}(A)$-vel jelöljük.