11. feladatsor – Algebrai struktúrák

11.1. Feladat. Válaszoljunk: vezessük le, vagy adjunk ellenpéldát.

(1) Teljesül-e tetszőleges asszociatív $(G, \circ)$ grupoid bármely a, b, c elemére az $(a \circ b) \circ c = (b \circ c) \circ a$ egyenlőség?
(2) Teljesül-e tetszőleges asszociatív, egységelemes $(G, \circ)$ grupoid bármely a, b, c elemére, hogy $a \circ c = b \circ c \Longrightarrow a = b$?
(3) Teljesül-e tetszőleges asszociatív, egységelemes $(G, \circ)$ grupoidban, ahol minden elemnek van inverze, bármely a, b, c elemre, hogy $a \circ c = b \circ c \Longrightarrow a = b$?
(4) Teljesül-e tetszőleges $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ csoportban bármely a, b, c elemre, hogy $(a \cdot a^{-1}) \cdot b = (c^{-1} \cdot c) \cdot b$?
(5) Teljesül-e tetszőleges $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ csoportban bármely a elemre, hogy $a = a^{-1} \Longrightarrow a^2 = 1$?

11.2. Feladat. Tekintsük a grupoidok következő osztályait: grupoid $\supset$ félcsoport $\supset$ monoid $\supset$ csoport $\supset$ Abel-csoport. Határozzuk meg (és indokoljuk), hogy a fentiek közül melyik az a legszűkebb osztály, amelybe a megadott grupoid beleesik.

(1) $(\{\text{páros egészek}\}, +)$
(2) $(\mathbb{Z}^+, \text{lkkt})$
(3) $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$
(4) $(\mathbb{R}^2, +)$ (azaz a síkvektorok a szokásos összeadásra nézve)

11.3. Feladat. Legyen $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ csoport. Adjuk meg a következő kifejezéseket minél egyszerűbb alakban:

(1) $a^{-1} \cdot (ab)^2 \cdot (b^{-1})^2$,
(2) $(a^3)^4 \cdot (ba)^{-1} \cdot b$,
(3) $(abc)^3 \cdot (c^{-1}b^{-1}a^{-1})^2$,
(4) a^{100}.

Számoljuk ki a fenti kifejezések értékét a következő csoportok megfelelő elemeire:

(a) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), a = 2, b = 5, c = -1$,
(b) $(\mathbb{Z}_6, +), a = \overline{3}, b = \overline{2}, c = \overline{4}$,
(c) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot), a = \overline{3}, b = \overline{4}, c = \overline{1}$,
(d) $(S_5, \cdot), a = (134), b = (12)(53), c = (14)$,
(e) $(\{\text{nemelfajuló } 2 \times 2\text{-es mátrixok}\}, \cdot), a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, b = c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11.4. Feladat. Legyen $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ csoport. Oldjuk meg a következő egyenleteket x-re:

(1) $a^3 \cdot x = 1$
(2) $aba^2 \cdot x \cdot a^2 = b$,
(3) $a^2 \cdot x \cdot (bab)^{-1} = ab^{-1}$.

Számoljuk ki x értékét a következő csoportok megfelelő elemeire:

(a) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), a = 2, b = 5$,
(b) $(\mathbb{Z}_6, +), a = \overline{3}, b = \overline{2}$,
(c) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot), a = \overline{3}, b = \overline{4}$,
(d) $(S_5, \cdot), a = (134), b = (12)(53)$,

(e) $(\{\text{nemelfajuló } 2\times 2\text{-es mátrixok}\},\cdot), a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11.5. Feladat. Határozzuk meg a következő csoportokban a megadott elemek rendjét.

(a) $(\mathbb{Z},+),\ o(1)$; (b) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot),\ o(-1)$; (c) $(\mathbb{Z}_8,+),\ o(\overline{6})$;
(d) $(\mathbb{Z}_{15},+),\ o(\overline{7})$; (e) $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot),\ o(\overline{3})$; (f) $(\mathbb{Z}_9^*,\cdot),\ o(\overline{5})$;
(g) $(S_8,\cdot),\ o((143)(65))$; (h) $(S_8,\cdot),\ o((231)(753))$.

11.6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy $(G,\cdot,^{-1},1)$ csoport pontosan akkor kommutatív, ha bármely $a,b\in G$ esetén $aba^{-1}b^{-1}=1$.

11.7. Feladat. Legyen $(T,+,\cdot)$ test a műveletek szokásos jelöléseivel. Adjuk meg a következő kifejezéseket minél egyszerűbb alakban:

(1) $(a+b+c+b)\cdot(b+c)^{-1}$,
(2) $((a^3+ab)\cdot 0)+(ab^2)$,
(3) $(a+b)^2-(a-b)^2$,
(4) $(ab)^3\cdot(-b)^{-2}$,

Számoljuk ki a fenti kifejezések értékét a következő testek megfelelő elemeire:

(a) $(\mathbb{Q},+,\cdot), a=2, b=5, c=-1$,
(b) $(\mathbb{C},+,\cdot), a=i, b=2, c=1+i$,
(c) $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot), a=\overline{3}, b=\overline{4}, c=\overline{2}$.