9. feladatsor – Relációk

Ismét $\underline{n}$ jelöli az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt, és D_n jelöli az n pozitív osztóinak halmazát.

9.1. Feladat. Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e. (A válaszokat természetesen indokolni is kell.) Ez alapján határozzuk meg, hogy az alábbi relációk közül melyek ekvivalenciák, melyek részbenrendezések, kvázirendezések, rendezések.

(1) $\{(1,2),(1,5),(1,6),(2,5),(3,2),(3,5),(4,5),(6,5)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,
(2) $\{(a,b) : |a| = |b|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon,
(3) $\{(a,b) : a/b \leq b/a\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon,
(4) $(\mathbb{R}, <) = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a < b\}$,
(5) $\{(a,b) : a^2 + b^2 = 1\}$ az $\mathbb{R}$, illetve $[0,1]$ halmazokon,
(6) $\{(a,b) : \text{lnko}(a,b) = 1\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,
(7) $\{\big((a,b),(c,d)\big) : a + d = b + c\}$ az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon.
(8) $\{(e,f) : e$ és f-nek van közös pontja$\}$ a sík egyeneseinek halmazán.
(9) $\{(a,b) : |a - b| > 1\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon,
(10) $\{(A,B) : |A| \leq |B|\}$ a $\mathcal{P}(\underline{3})$ halmazon.

9.2. Feladat. Adjuk meg az A halmazon értelmezett ρ ekvivalenciához tartozó osztályozást.

(1) $A = \mathbb{N}$, $\rho = \{(a,b) : 3 \mid a^2 - b^2\}$,
(2) $A = \underline{4}$, $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1)\}$,
(3) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x,y) : xy > 0$ vagy $x = y = 0\}$,
(4) $A = \underline{4}$, $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$,
(5) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x,y) : (\exists a \in \mathbb{Z})(x,y \in [3a, 3a+3))\}$.

9.3. Feladat. Adjuk meg a következő leképezések magjához tartozó osztályozást.

(1) $\varphi\colon P(\{1,2,3,4,5\}) \to \mathbb{N}, A \mapsto |A|$,
(2) $(1\ 3\ 5)(2\ 4) \in S_5$,
(3) $\psi\colon \underline{4} \times \underline{4} \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto x$,
(4) $\sigma\colon \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8, x \mapsto x^2$,
(5) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.

9.4. Feladat. Adjunk meg olyan osztályozást a $\underline{8}$ halmazon, melynek 3 osztálya van, és melyhez tartozó ρ ekvivalenciára teljesülnek a következõ feltételek:

(1) $(1,3),(2,6) \in \rho$,
(2) $(1,2) \in \rho, (1,3),(2,4),(3,5) \notin \rho$.

9.5. Feladat. Legyen ρ az $\underline{6}$ halmaz megadott osztályozáshoz tartozó ekvivalencia. Hány eleme van ρ-nak? Add meg ρ legalább 5 olyan (x,y) elemét, melyekre $x \neq y$.

(1) $\{\{1,4\},\{2,5,6\},\{3\}\}$,
(2) $\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$.

9.6. Feladat. Hány olyan ekvivalenciája van a $\underline{7}$ halmaznak, melyhez tartozó osztályozásnak

(1) 3 osztálya van, melyek $1, 2, 4$ eleműek;
(2) 3 osztálya van?

9.7. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Melyek rendezések?

(1) $(D_{30}; \leq)$;
(2) $(D_{30}; |)$;
(3) $(C; |)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$;
(4) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$;
(5) $(D; \sqsubseteq)$, ahol $D = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$, és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye,
(6) $(E; \lhd)$, ahol $E = \{121, 123, 222, 145, 346, 743, 777, 325, 220\}$, és $\overline{abc} \lhd \overline{def} \iff (a < d) \vee ((a = d) \wedge (b < e)) \vee ((a = d) \wedge (b = e) \wedge (c \leq f))$

9.8. Feladat. Adjuk meg azon részbenrendezés elemeit, melynek a fedési relációja a következő:

(1) $\{(a, b) \in \underline{7} \times \underline{7}, b = a + 2\}$
(2) $\{(a, c), (c, d), (b, e), (d, e)\} \subseteq \{a, b, c, d, e\}^2$
(3) $\{(a, b) \in \underline{8} \times \underline{8} : b = 2a\}$
(4) $\{(A, B) \in \mathcal{P}(\{a, b, c\})^2 : ((A = B \cup \{a\}) \vee (A = B \cup \{b\})) \wedge (A \neq B)\}$

9.9. Feladat. Adjunk meg olyan Hasse-diagramokat, amelyekben

(1) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 5 eleme van,
(2) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 3 eleme van,
(3) bármely két elem összehasonlítható, és összesen 5 eleme van,
(4) bármely két elem összehasonlítható, és nincs benne legkisebb elem,
(5) 3 minimális elem van, nincs legnagyobb elem, és összesen 4 eleme van,

9.10. Feladat. Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

(1) $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a - b = 0\}$,
(2) $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = a + 1\}$,
(3) $\{(2, 3), (1, 3), (2, 5), (5, 5), (1, 2), (3, 1), (5, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$,
(4) $\{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |X \backslash Y| = |Y \backslash X| = 1\}$.

Melyek részbenrendezések, melyek ekvivalenciák?