FELADATSOR A *CSOPORTOK ÉS TESTEK* GYAKORLATHOZ

Emlékeztetőül idemásoltam az előfeltételek tematikáját. **Vastagon szedem** azokat a részeket, amelynek az ismerete fokozottan ajánlott a gyakorlat résztvevőinek. Kérem, a félév első néhány hetében ezt ismételje át mindenki, aki nem érzi biztosnak a tudását ezekről a fogalmakról.

LINEÁRIS ALGEBRA TEMATIKA

Vektorok és pontok a valós elem-n-esek körében, vektorok összege és skalárral való szorzása, lineáris kombináció, alkalmazások (egy egyenesre, ill. síkra eső vektorok, pontok, az általuk kifeszített egyenesek és síkok, lineáris mozgás).

Belső szorzat, vektorok hossza, háromszög-egyenlőtlenség, Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség, vektorok merőlegessége, merőleges vetítés, alkalmazások (háromszög nevezetes pontjai, Euler-vonal).

Egyenesek, síkok, hipersíkok a valós elem-n-esek körében. Homogén és nemhomogén lineáris egyenletrendszerek, mátrixuk. Elemi átalakítások, Gauss-elimináció, lineáris egyenletrendszerek általános megoldása. Lineáris egyenletrendszer mint vektorok lineáris kombinációja, alkalmazások (egyenesek és síkok megadása). **Mátrixműveletek és azok algebrai szabályai**, kapcsolat a lineáris egyenletrendszerekkel. Mátrixegyenletek, **mátrixok inverze**, alkalmazások (mátrixok LU-faktorizációja, Leontyev-mátrix). Mátrixok blokkokkal való megadása és ezekkel való számolás.

Determinánsok, kiszámításuk kifejtéssel és elemi átalakításokkal, determináns mint előjeles térfogat. **A determinánsok szorzástétele**, nemelfajuló mátrixok, Cramer-szabály. Lineárisan függő, illetve független vektorrendszerek, vektorrendszer rangja. Mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangja, mátrixok rangszámtétele, rang kiszámítása, Kronecker–Capelli-tétel. Alterek a valós elem-n-esek körében és megadásuk kifeszített altérként, illetve hipersíkok metszeteként. Alterek bázisa, vektorok koordinátasora tetszőleges bázisban. Altér dimenziója, az alterek dimenziótétele, ranggal való kapcsolat.

Lineáris leképezések, a sík és tér nevezetes lineáris transzformációi. *Lineáris leképezések képtere és magtere. Lineáris leképezések mátrixa.* Lineáris leképezések skalárral való szorzása, összege, szorzata, inverze, ezek kapcsolata a mátrixműveletekkel. A bázisáttérés mátrixa, mátrixok hasonlósága.

Lineáris transzformációk és mátrixok sajátértéke, sajátvektora és sajátaltere, mátrixok karakterisztikus polinomja, diagonális mátrixhoz hasonló mátrixok, alkalmazások (képtömörítés, lineáris rekurzió, Markov-láncok).

Szimmetrikus bilineáris leképezések és mátrixuk, kvadratikus alakok és mátrixuk, kvadratikus alakok kanonikus és normál alakra hozása, kvadratikus alakok osztályozása (definitség).

Ortogonális, illetve ortonormált vektorrendszerek, Gram–Schmidt-féle eljárás, mátrixok QR- faktorizációja, főtengelytétel. *Absztrakt vektorterek, vektorterek izomorfiája*, absztrakt euklideszi terek, euklideszi terek izomorfiája.

DISZKRÉT MATEMATIKA TEMATIKA

Számelmélet alapjai (oszthatóság, számelmélet alaptétele, prímek eloszlása, euklideszi algoritmus, **lineáris kongruencia rendszerek, kínai maradéktétel**).

Logikai alapok (ítéletkalkulus, predikátumkalkulus, formalizálás, logikai ekvivalencia, következményfogalom, bizonyítási módszerek, tagadás, példa, ellenpélda). Halmazok (megadási módjaik, halmazműveletek, hatványhalmaz, leképezések, permutációk, alapvető halmazok számossága, betekintés a halmazelméleti axiómákba).

Műveletek (asszociatív, kommutatív, idempotens, egységelem, zéruselem, inverz, disztributív tulajdonságok, nevezetes példák). Relációk (reflexív, szimmetrikus, tranzitív, antiszimmetrikus relációk, ekvivalenciarelációk és osztályozások, részbenrendezések és Hasse-diagramok). Algebrai struktúrák (hálószerűen rendezett halmazok és hálók ekvivalenciája, nevezetes példák csoportokra, gyűrűkre, testekre és hálókra).

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET TEMATIKA

Komplex számok, kanonikus és trigonometrikus alak. Moivre-képlet, gyökvonás, egységgyökök, egységgyök rendje, primitív egységgyökök. Harmad- és negyedfokú egyenletek, az algebra alaptétele (ismertetés).

Teljes és redukált maradékrendszerek, az Euler-féle fi függvény, **Euler–Fermat-tétel, rend modulo m, primitív gyökök, index**. Négyzetes maradékok, Legendre-szimbólum. Titkosírások, nevezetes számelméleti problémák (ismertetés).

A gyűrű, az integritástartomány és a test fogalma, nevezetes példák (számgyűrűk és számtestek, maradékosztály-gyűrűk és maradékosztály-testek, mátrixgyűrűk).

A polinom fogalma, test feletti polinomgyűrű. Oszthatóság, maradékos osztás, lnko és lkkt, euklideszi algoritmus, kétismeretlenes lineáris diofantoszi egyenlet, kongruencia, maradékosztályok, maradékosztály-gyűrű, lineáris kongruencia, multiplikatív inverz mod f.

Polinom és polinomfüggvény, Lagrange-interpoláció, **polinomok (többszörös) gyökei, Bézout tétele**, (iterált) Horner-módszer. **Irreducibilis polinomok, egyértelmű irreducibilis faktorizáció.** Viete-formulák, irreducibilis faktorizáció a komplex, valós és racionális számtest fölött, **Schönemann–Eisenstein-tétel, Rolle-tétel. Polinomgyűrű faktorteste, egyszerű algebrai bővítés, véges testek konstrukciója. Derivált, polinomok közös, ill. többszörös gyökei.**

Véges halmaz permutációi, a szimmetrikus csoport. Ciklusfelbontás, hatványozás, rend. Előállítás transzpozíciók szorzataként, páros és páratlan permutációk, az alternáló csoport. Permutációs játékok (ismertetés).

A csoport, mint absztrakt struktúra, művelettáblázat, izomorfia, izomorfizmus. Nevezetes példák: számok, (redukált) maradékosztályok, permutációk, mátrixok, transzformációk csoportjai, lineáris csoportok, diédercsoport, kvaterniócsoport. Hatványozás, elem rendje, ciklikus csoport és részcsoportjai. Részcsoport, generálás. Mellékosztályok, Lagrange tétele. Alkalmazás összeszámlálási feladatokra (ismertetés).

1. Normálosztók, csoporthomomorfizmusok

Feladat 1.1. Adja meg az A_4 csoport részcsoport- és normálosztóhálóját.

Feladat 1.2. Adja meg a D_6 csoport részcsoport- és normálosztóhálóját.

Feladat 1.3. Adja meg az $SL(2,2)$ művelettábláját. ($SL(2,2)$ a $\mathbf{Z}_2$ feletti 1 determinánsú 2×2-es mátrixok multiplikatív csoportja.) Döntse el, hogy a csoport egyszerű-e.

Feladat 1.4. Adja meg a V csoport automorfizmusait, és azok rendjeit. Milyen csoporttal izomorf V automorfizmuscsoportja?

Feladat 1.5. Adja meg a Q csoport automorfizmusait, és azok rendjeit. Kommutatív Q automorfizmuscsoportja?

Feladat 1.6. Adja meg az S_3 csoport automorfizmusait, és azok rendjeit. Kommutatív S_3 automorfizmuscsoportja?

Feladat 1.7. Tekintsük az S_5 csoport $H = [(123), (12), (45)]$ részcsoportját. Hány elemű H? Határozza meg $|g_iH \cap Hg_i|$-t $i = 1, 2, 3$-ra, ha $g_1 = (23415)$, $g_2 = (34)(12)$, $g_3 = (312)(54)$.

Feladat 1.8. Adja meg a $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{H}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív. A két feladatrészből csak az egyiket kell beadni.

(1) $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Q}$
(2) $\mathbf{G} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Z}$

Feladat 1.9. Adja meg a $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{H}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív. A két feladatrészből csak az egyiket kell beadni.

(1) $\mathbf{G} = \mathbf{R}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Q}$
(2) $\mathbf{G} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{H} = \mathbf{R}$

Feladat 1.10. Adja meg a $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{H}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív. A három feladatrészből csak az egyiket kell beadni.

(1) $\mathbf{G} = \mathbf{Z}_6$, $\mathbf{H} = \mathbf{Z}_{12}$
(2) $\mathbf{G} = \mathbf{Z}_{12}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Z}_6$
(3) $\mathbf{G} = \mathbf{Z}_{15}$, $\mathbf{H} = \mathbf{Z}_9$

Feladat 1.11. Adja meg a $\mathbf{G} \mapsto \mathbf{H}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív. A két feladatrészből csak az egyiket kell beadni.

(1) $\mathbf{G} = Q$, $\mathbf{H} = V$
(2) $\mathbf{G} = V$, $\mathbf{H} = Q$

Feladat 1.12. Melyik kettő izomorf a következők közül: $A_4/[(12)(34), (13)(24)]$, $S_3/[(12)]$, $\mathbf{Z}_9/[3]$?

Feladat 1.13. Hány kételemű generátorrendszere van a D_6 csoportnak?

Feladat 1.14. Hány kételemű generátorrendszere van a Q csoportnak?

Feladat 1.15. Egy $\mathbf{G}$ csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. $\sim$ ekvivalencia reláció, ezt ennél a feladatnál nem kell megmutatni. Mik a hozzá tartozó osztályozás elemei, ha $\mathbf{G} = \mathbf{Z}_8$, illetve ha $\mathbf{G} = D_8$?

Feladat 1.16. Egy $\mathbf{G}$ csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. $\sim$ ekvivalencia reláció, ezt ennél a feladatnál nem kell megmutatni. Mik a hozzá tartozó osztályozás elemei, ha $\mathbf{G} = V$, illetve ha $\mathbf{G} = Q$?

Feladat 1.17. Egy $\mathbf{G}$ csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. $\sim$ ekvivalencia reláció, ezt ennél a feladatnál nem kell megmutatni. Mik a hozzá tartozó osztályozás elemei, ha $\mathbf{G} = S_3$, illetve ha $\mathbf{G} = S_4$?

Feladat 1.18. Egy $\mathbf{G}$ csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. $\sim$ ekvivalencia reláció, ezt ennél a feladatnál nem kell megmutatni. Mik a hozzá tartozó osztályozás elemei, ha $\mathbf{G} = A_4$?

Feladat 1.19. Egy csoport a és b elemei *felcserélhetőek*, ha $ab = ba$. Igazolja, hogy amennyiben egy csoportnak van olyan generátorrendszere, amelynek bármely két eleme felcserélhető, akkor a csoport kommutatív.

Feladat 1.20. Igazolja, hogy Abel-csoportban a véges rendű elemek részcsoportot alkotnak.

Feladat 1.21. Legyen $\mathbf{G}$ csoport, $\mathbf{N}$ egy normálosztója, valamint $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}/\mathbf{N}$. Igazolja, hogy ha a $\mathbf{H}' := \{g \in G : g/N \in H\}$ csoport normálosztó $\mathbf{G}$-ben, akkor $\mathbf{H}$ normálosztó $\mathbf{G}/\mathbf{N}$-ben.

Feladat 1.22. Egy $\mathbf{G}$ csoport egy g elemének *centralizátora* a $C_g := \{h : gh = hg\}$ halmaz, a $\mathbf{G}$ *centruma* a $\bigcap_{g\in G} C_g$ halmaz. Bizonyítsa, hogy a centralizátorok részcsoportok, és a centrum normálosztó. Adja meg az S_3 csoport egy olyan elemét, melynek centralizátora nem normálosztó.

Feladat 1.23. Egy $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathbf{G}$ automorfizumus esetén legyen $\operatorname{Fix}\varphi := \{g : \varphi(g) = g\}$. Igazolja, hogy $\operatorname{Fix}\varphi$ mindig részcsoportja $\mathbf{G}$-nek. Adjon meg egy $\varphi \in \operatorname{Aut} S_3$ automorfzmust, melyre $\operatorname{Fix}\varphi$ nem normálosztó.

Feladat 1.24. Egy $\mathbf{G}$ csoport g_1 és g_2 elemeit *konjugáltnak* nevezzük (jelölés: $g_1 \sim g_2$), ha van olyan $h \in G$ elem, melyre $h^{-1}g_1h = g_2$. Mutassa meg, hogy $\sim$ ekvivalencia reláció.

Feladat 1.25. Milyen n és m természetes számok esetén létezik injektív $D_m \to D_n$ homomorfizmus?

Feladat 1.26. Milyen n és m természetes számok esetén létezik szürjektív $D_m \to D_n$ homomorfizmus?

Feladat 1.27. Izomorfak-e az $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ és a $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ csoportok? Izomorfak-e a $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ és a $\mathbf{Q}$ csoportok?

Feladat 1.28. Melyik az a legkisebb elemszámú $\mathbf{G}$ csoport, melynek van olyan $\mathbf{H}$ normálosztója, hogy $\mathbf{H}$-nak van olyan normálosztója, ami $\mathbf{G}$-nek nem normálosztója?

Feladat 1.29. Igaz-e, hogy ha egy csoport tetszőleges normálosztójának tetszőleges normálosztója az eredeti csoportnak is normálosztója, akkor a csoport Abel-féle?

Feladat 1.30. Igaz-e, hogy a kör szimmetriacsoportja izomorf $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$-vel? Igaz-e, hogy van köztük injektív, illetve szürjektív homomorfizmus?

Feladat 1.31. Melyik a legkisebb olyan n természetes szám (ha egyáltalán van ilyen n), melyre D_n-nek van Q-val izomorf részcsoportja.

Feladat 1.32. Igazolja, hogy amennyiben $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, és $\mathbf{K}$ olyan csoportok, hogy létezik $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$ szürjektív és $\mathbf{K} \to \mathbf{H}$ injektív homomorfizmus, akkor van olyan $\mathbf{H}'$ csoport, amelyre létezik $\mathbf{H}' \to \mathbf{G}$ injektív és $\mathbf{H}' \to \mathbf{K}$ szürjektív homomorfizmus.

Feladat 1.33. Tekintsük az A_5 csoport $\pi = (123)$ elemét. Van egy halmazunk, amelyben eredetileg csak a π permutáció van. Ezután újabb permutációkat tehetünk a halmazba: ha egy τ már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük egy tetszőleges A_5-beli elemmel vett konjugáltját, ha pedig a τ_1 és τ_2 permutációk benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük a $\tau_1\tau_2$ permutációt. Hány euróra van szükségünk, hogy A_5 *bármely* elemét beletehessük a halmazba? Hány euróra van szükségünk, hogy A_5 *összes* elemét beletehessük?

Feladat 1.34. Tekintsük az A_5 csoport $\pi = (12)(34)$ elemét. Van egy halmazunk, amelyben eredetileg csak a π permutáció van. Ezután újabb permutációkat tehetünk a halmazba: ha egy τ már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük egy tetszőleges A_5-beli elemmel vett konjugáltját, ha pedig a τ_1 és τ_2 permutációk benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük a $\tau_1\tau_2$ permutációt. Hány euróra van szükségünk, hogy A_5 *bármely* elemét beletehessük a halmazba? Hány euróra van szükségünk, hogy A_5 *összes* elemét beletehessük?

Feladat 1.35. Tekintsük az A_5 csoport $\pi = (12345)$ elemét. Van egy halmazunk, amelyben eredetileg csak a π permutáció van. Ezután újabb permutációkat tehetünk a halmazba: ha egy τ már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük egy tetszőleges A_5-beli elemmel vett konjugáltját, ha pedig a τ_1 és τ_2 permutációk benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük a $\tau_1\tau_2$ permutációt. Hány euróra van szükségünk, hogy A_5 *bármely* elemét beletehessük a halmazba? Hány euróra van szükségünk, hogy A_5 *összes* elemét beletehessük?

Feladat 1.36. Igazolja, hogy ha $\mathbf{G}$ véges csoport, $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$, akkor minden $g \in \mathbf{G}$ esetén $gH \cap Hg$ elemszáma osztja $\mathbf{H}$ elemszámát.

2. Direkt szorzatok, Abel-csoportok, Cayley-ábrázolás

Feladat 2.1. Határozza meg izomorfia erejéig a 18 és a 36 elemű Abel-csoportokat. Szemléltesse páros gráffal, hogy mely 18 elemű csoport ágyazható be mely 36 eleműbe.

Feladat 2.2. Határozza meg izomorfia erejéig a 10 és a 40 elemű Abel-csoportokat. Szemléltesse páros gráffal, hogy mely 10 elemű csoport ágyazható be mely 40 eleműbe.

Feladat 2.3. Határozza meg izomorfia erejéig a 48 elemű Abel-csoportokat,és határozza meg mindegyiknek az exponensét. (Egy csoport exponense a legkisebb olyan pozitív n, melyre $g^n = 1$ teljesül a csoport összes g elemére. Ha nincs ilyen n, az exponens végtelen.)

Feladat 2.4. Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a D_5 csoport?

Feladat 2.5. Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a Q csoport?

Feladat 2.6. Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára az A_4 csoport?

Feladat 2.7. Hány részcsoportja van $\mathbf{Z}_4^2$-nek? Hány részcsoportja van $\mathbf{Z}_4^2$-nek izomorfia erejéig?

Feladat 2.8. Hány részcsoportja van $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_6$-nak? Hány részcsoportja van $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_6$-nak izomorfia erejéig?

Feladat 2.9. Hány részcsoportja van $\mathbf{Z}_2^4$-nek? Hány részcsoportja van $\mathbf{Z}_2^4$-nek izomorfia erejéig?

Feladat 2.10. Hány V-vel izomorf részcsoport van $D_4 \times \mathbf{Z}_6$-ban?

Feladat 2.11. Hány Q-val izomorf részcsoport van $Q \times \mathbf{Z}_2$-ben?

Feladat 2.12. Hány S_3-mal izomorf részcsoport van $S_3 \times \mathbf{Z}_2$-ben?

Feladat 2.13. Hány $Q \to \mathbf{Z}_2^4$ homomorfizmus van?

Feladat 2.14. Hány $Q \to \mathbf{Z}_4^2$ homomorfizmus van?

Feladat 2.15. Hány $\mathbf{Z}_4^2 \to \mathbf{Z}_4^2$ homomorfizmus van? Ezek közül mennyi automorfizmus?

Feladat 2.16. Hány $\mathbf{Z}_2^4 \to \mathbf{Z}_2^4$ homomorfizmus van? Ezek közül mennyi automorfizmus?

Feladat 2.17. Tekintsük a következő művelettáblázattal megadott csoportot:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	3	2	5	14	12	0	11	15	13	4	6	17	16	9	1	10	8	7
1	2	3	14	5	13	1	15	11	12	8	7	10	9	16	0	17	4	6
2	5	14	1	0	9	2	10	17	16	13	15	6	4	8	3	7	12	11
3	14	5	0	1	16	3	17	10	9	12	11	7	8	4	2	6	13	15
4	15	13	17	16	1	4	0	9	10	11	12	8	7	3	6	2	5	14
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	13	15	16	17	10	6	9	0	1	5	14	2	3	7	4	8	11	12
7	12	11	9	10	17	7	16	1	0	14	5	3	2	6	8	4	15	13
8	11	12	10	9	0	8	1	16	17	15	13	4	6	2	7	3	14	5
9	7	8	11	12	14	9	5	13	15	6	4	16	17	0	10	1	2	3
10	8	7	12	11	15	10	13	5	14	2	3	1	0	17	9	16	6	4
11	9	10	8	7	6	11	4	3	2	0	1	5	14	15	12	13	17	16
12	10	9	7	8	2	12	3	4	6	17	16	13	15	14	11	5	0	1
13	17	16	6	4	3	13	2	8	7	10	9	12	11	5	15	14	1	0
14	1	0	3	2	8	14	7	6	4	16	17	15	13	12	5	11	9	10
15	16	17	4	6	7	15	8	2	3	1	0	14	5	11	13	12	10	9
16	6	4	15	13	5	16	14	12	11	7	8	9	10	1	17	0	3	2
17	4	6	13	15	11	17	12	14	5	3	2	0	1	10	16	9	7	8

Keressen két valódi részcsoportot ebben a csoportban, melyeknek a csoport (belső) direkt szorzata.

Feladat 2.18. Felbontható nemtriviális direkt szorzatra a lenti művelettáblával megadott csoport?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	3	15	14	4	11	2	8	12	1	10	7	0	9	5	13	6
1	15	11	12	6	8	7	3	5	4	14	13	1	2	10	9	0
2	5	12	3	13	14	4	10	8	9	15	1	2	6	11	0	7
3	4	6	13	11	0	14	1	9	15	7	12	3	10	2	5	8
4	11	8	5	0	3	13	15	10	6	12	9	4	7	14	2	1
5	13	7	0	14	2	3	9	6	12	1	8	5	15	4	11	10
6	8	3	10	1	15	9	11	14	0	5	2	6	13	12	7	4
7	10	5	15	9	12	6	14	3	2	11	4	7	0	8	1	13
8	1	4	7	15	6	10	0	13	3	2	14	8	5	9	12	11
9	12	14	8	7	10	1	5	11	13	3	0	9	4	15	6	2
10	9	13	1	12	7	15	2	0	5	4	3	10	11	6	8	14
11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
12	7	2	6	10	9	8	13	4	14	0	11	12	3	1	15	5
13	14	10	11	2	5	0	12	15	7	8	6	13	1	3	4	9
14	2	9	4	5	13	11	7	1	10	6	15	14	8	0	3	12
15	6	0	9	8	1	12	4	2	11	13	5	15	14	7	10	3

Feladat 2.19. Legyen p prímszám. Igazolja, hogy tetszőleges n esetén $\mathbf{Z}_p^n$, mint Abel-csoport részcsoportjai, illetve $\mathbf{Z}_p^n$, mint $\mathbf{Z}_p$ feletti vektortér alterei megegyeznek. Igaz ugyanez a $\mathbf{Q}$ csoportra/testre is?

Feladat 2.20. Legyen $\mathbf{G}$ egy csoport, és N egy normálosztója. Tetszőleges $g \in G$ esetén definiáljuk a $\overline{\rho}_g : G/N \mapsto G/N$ leképezést a következő módon: bármely $h \in G$-re legyen $(h/N)\overline{\rho}_g = (hg)/N$. Igazolja, hogy a $\overline{\rho}_g$ leképezés jóldefiniált. Akkor is jóldefiniált marad, ha N-ről csak azt tételezzük fel, hogy részcsoportja $\mathbf{G}$-nek?

Feladat 2.21. Tekintsük a 2.20 feladatban definiált $\overline{\rho}_g$ leképezéseket (azt feltéve, hogy N normálosztó). Igazolja, hogy a $\mathbf{G} \mapsto S_{G/N}$, $g \mapsto \overline{\rho}_g$ leképezés homomorfizmus, és határozza meg a magját.

Feladat 2.22. Legyen $\mathbf{G}$ csoport, és minden $g \in G$ esetén a $\kappa_g : G \mapsto G$ leképezés a $\kappa_g(h) := g^{-1}hg$ formulával megadva. Igazolja, hogy a $\mathbf{G} \mapsto S_G$, $g \mapsto \kappa_g$ leképezés homomorfizmus. Igaz-e, hogy mindig injektív?

Feladat 2.23. Legyen $\mathbf{G}$ csoport, és $\tau \in \operatorname{Aut}\mathbf{G}$. Igazolja, hogy τ *gráfja*, vagyis a $\{(g, g\tau) : g \in G\}$ halmaz, részcsoport $\mathbf{G}^2$-ben. Igaz, hogy feltétenül normálosztó?

Feladat 2.24. Legyen $\mathbf{G}$ csoport, és tekintsük az

$$\eta\colon G^2 \to G, \quad (g, h) \to gh$$

leképezést. Igazolja, hogy η akkor és csak akkor homomorfizmus, ha $\mathbf{G}$ Abel-csoport.

Feladat 2.25. Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a $(\mathbf{Z}, +)$ csoport?

Feladat 2.26. Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a $(\mathbf{Q}\backslash\{0\}, *)$ csoport?

Feladat 2.27. Egy $\mathbf{G}$ csoportot *direkt felbonthatatlannak* nevezünk, ha nem léteznek olyan nemtriviális $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ csoportok, melyekre $\mathbf{G} \approxeq \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$. A $\mathbf{G}$ csoport *direkt prím*, ha bármely $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ csoportokra, melyekre $\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$-nek van $\mathbf{G}$-vel izomorf részcsoportja, teljesül az, hogy vagy $\mathbf{K}_1$-nek, vagy $\mathbf{K}_2$-nek is van $\mathbf{G}$-vel izomorf részcsoportja. Igazolja, hogy minden véges direkt prím csoport direkt felbonthatatlan.

Feladat 2.28. A $\mathbf{G}$ csoport *direkt prím*, ha bármely $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ csoportokra, melyekre $\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$-nek van $\mathbf{G}$-vel izomorf részcsoportja, teljesül az, hogy vagy $\mathbf{K}_1$-nek, vagy $\mathbf{K}_2$-nek is van $\mathbf{G}$-vel izomorf részcsoportja. Mutassa meg, hogy $(\mathbf{Z}, +)$ direkt prím.

Feladat 2.29. A $\mathbf{G}$ csoport *direkt prím*, ha bármely $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ csoportokra, melyekre $\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$-nek van $\mathbf{G}$-vel izomorf részcsoportja, teljesül az, hogy vagy $\mathbf{K}_1$-nek, vagy $\mathbf{K}_2$-nek is van $\mathbf{G}$-vel izomorf részcsoportja. Határozza meg, hogy melyek azok a véges Abel-csoportok, amelyek direkt prímek.

Feladat 2.30. Milyen k természetes számok esetén igaz, hogy a $\mathrm{GL}(\mathbf{R}, k)$ csoport a belső direkt szorzata az $\mathrm{SL}(\mathbf{R}, k)$ és a $\{\lambda I : \lambda \in \mathbf{R}\}$ csoportoknak? (I a $k \times k$ méretű egységmátrixot jelöli.)

Feladat 2.31. Melyik az a legkisebb n természetes szám, melyre S_n-nek van n-nél nagyobb rendű kommutatív részcsoportja?

Feladat 2.32. Igazolja, hogy minden n esetén létezik injektív homomorfizmus S_n-ből A_{n+2}-be.

Feladat 2.33. Tekintsük a $d(x, y, z) := x - y + z$ háromváltozós műveletet a $\mathbf{G}$ Abel-csoporton. Egy $A \subseteq G$ halmazt *megőrzi* a d műveletet, ha tetszőleges $a_1, a_2, a_3 \in A$ esetén $d(a_1, a_2, a_3) \in A$. Igazolja, hogy az A halmazt pontosan akkor őrzi meg a d, ha van olyan $\mathbf{H}$ részcsoportja $\mathbf{G}$-nek, hogy A egy $\mathbf{H}$ szerinti mellékosztály.

Feladat 2.34. Bármely p prímszám esetén E_{p^∞} jelöli azon komplex egységgyökök halmazát, melyek rendje p-hatvány. Igazolja, hogy ez a halmaz a szorzásra nézve csoportot alkot, amely nem bontható fel nemtriviális direkt szorzatra.

Feladat 2.35. Igazolja vagy cáfolja a következő állítást: ha $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ véges Abel-csoportok, továbbá minden n-re $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ ugyanannyi n rendű elemet tartalmaz, akkor $\mathbf{G} \approxeq \mathbf{H}$.

Feladat 2.36. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{G}$ csoport a $\mathbf{H}_1$ és $\mathbf{H}_2$ részcsoportjainak belső direkt szorzata, továbbá $\mathbf{G}$ *torziómentes*: az egységelemet leszámítva minden elem rendje végtelen. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $h \in G$ és pozitív egész n esetén, amennyiben $h^n \in H_1$, akkor $h \in H_1$. Ezután lássa be, hogy ha $(\mathbf{Q}, +)$-ot két részcsoportja direkt szorzataként írjuk fel, akkor az egyik tényező izomorf lesz $(\mathbf{Q}, +)$-val.

3. Gyűrűk

Feladat 3.1. Határozza meg a $\mathbf{Z}_3^2$ gyűrű részgyűrűit és ideáljait.

Feladat 3.2. Határozza meg a $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ gyűrű részgyűrűit és ideáljait.

Feladat 3.3. Határozza meg a $\mathbf{Z}_2^3$ gyűrű részgyűrűit és ideáljait.

Feladat 3.4. Tekintsük a $2\mathbf{Z}_{12}$ gyűrűt (lásd: 3.16 feladat). Határozza meg ennek a gyűrűnek az ideáljait, és adja meg az ideálok szorzásának (lásd: 3.12 feladat) a művelettábláját.

Feladat 3.5. Tekintsük a $2\mathbf{Z}_{16}$ gyűrűt (lásd: 3.16 feladat). Határozza meg ennek a gyűrűnek az ideáljait, és adja meg az ideálok szorzásának (lásd: 3.12 feladat) a művelettábláját.

Feladat 3.6. Tekintsük a $\mathbf{Z}_2^3$ gyűrűt. Határozza meg ennek a gyűrűnek az ideáljait, és adja meg az ideálok szorzásának (lásd: 3.12 feladat) a művelettábláját.

Feladat 3.7. Mely pozitív egész n-ek esetén van a $\mathbf{Z}_n$ gyűrűnek nemtriviális (vagyis nemidentikus) automorfizmusa?

Feladat 3.8. Legyen $n > 1$. A $\mathbf{Z}_n^2$ vagy a $\mathbf{Z}_{n^2}$ gyűrűnek van több ideálja?

Feladat 3.9. Igazolja, hogy minden prímrendű gyűrű kommutatív.

Feladat 3.10. Mely n és k pozitív egész számokra teljesül $\mathbf{Z}_{nk} \cong \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_k$ (mint gyűrűizomorfizmus)?

Feladat 3.11. Igaz, hogy amennyiben $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$ egyaránt egységelemes gyűrűk, akkor minden $\mathbf{R}$-ből $\mathbf{S}$-be menő homomorfizmus $1_{\mathbf{R}}$-t $1_{\mathbf{S}}$-be viszi?

Feladat 3.12. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű I_1 és I_2 ideáljainak *szorzatán* az $I_1 I_2$ komplexusszorzat által generált additív részcsoportot értjük. Igazolja, hogy ez mindig ideálja $\mathbf{R}$-nek.

Feladat 3.13. Legyenek $\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{R}_2$ gyűrűk, $I_1 \lhd R_1$ és $I_2 \lhd R_2$. Igazolja, hogy az $\{(a_1, a_2) : a_1 \in I_1,\, a_2 \in I_2\}$ halmaz ideál $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$-ben, és hogy

$$(\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)/(I_1 \times I_2) \cong (\mathbf{R}_1/I_1) \times (\mathbf{R}_2/I_2).$$

Feladat 3.14. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy a elemének *centralizátora* a $C_a := \{b : ab = ba\}$ halmaz, az $\mathbf{R}$ *centruma* a $\bigcap_{a \in R} C_a$ halmaz. Bizonyítsa, hogy a centralizátorok és a centrum részgyűrűk. Igaz, hogy a centrum minden esetben ideál?

Feladat 3.15. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy r elemének *annulátora* az $A_r := \{b : rb = br = 0\}$ halmaz, a gyűrű annulátora pedig a $\bigcap_{r \in R} A_r$ halmaz. Bizonyítsa, hogy minden elem annulátora részgyűrű. Igaz, hogy a gyűrű annulátora minden esetben ideál?

Feladat 3.16. 4 Egy $\mathbf{R}$ gyűrű és egy n természetes szám esetén $nR := \{a \in R : \exists\, b \in R : nb = a\}$ az $\mathbf{R}$-ben n-el osztható elemek halmaza. Bizonyítsa be, hogy nR minden n és $\mathbf{R}$ esetén ideál $\mathbf{R}$-ben.

Feladat 3.17. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy $\mathbf{A}$ részgyűrűjét *balideálnak* nevezzük, ha minden $r \in R$ és $a \in A$ esetén $ra \in A$. Bizonyítsa, hogy tetszőleges $\mathbf{V}$ vektortér tetszőleges $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ alterére azon $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ leképezések, melyekre $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq U$, balideált alkotnak $\mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$-ben. ($\mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ a $\mathbf{V}$ vektortér lineáris leképezéseinek gyűrűje). Ezután adjon meg a 2×2-es valós mátrixok gyűrűjében egy nemtriviális balideált.

Feladat 3.18. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy $\mathbf{A}$ részgyűrűjét *jobbideálnak* nevezzük, ha minden $r \in R$ és $a \in A$ esetén $ar \in A$. Bizonyítsa, hogy tetszőleges $\mathbf{V}$ vektortér tetszőleges $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ alterére azon $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ leképezések, melyekre $U \subseteq \ker(\varphi)$, jobbideált alkotnak $\mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$-ben. ($\mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ a $\mathbf{V}$ vektortér lineáris leképezéseinek gyűrű-je). Ezután adjon meg a 2×2-es valós mátrixok gyűrűjében egy nemtriviális jobbideált.

Feladat 3.19. Legyen $n > 1$. Adjon meg egy nemtriviális (vagyis nemidentikus) automorfizmust az $n \times n$-es valós mátrixok gyűrűjén.

Feladat 3.20. Igazolja, hogy ha I_1 és I_2 az $\mathbf{R}$ gyűrű két, egymást nem tartalmazó ideálja, akkor $I_1 \cup I_2$ nem ideál $\mathbf{R}$-ben.

Feladat 3.21. Igazolja, hogy ha $\mathbf{R}$ gyűrű, $\mathbf{I}_1 \lhd \mathbf{R}$, $\mathbf{I}_2 \lhd \mathbf{I}_1$, és $\mathbf{I}_2$ egységelemes gyűrű, akkor $\mathbf{I}_2 \lhd \mathbf{R}$.

Feladat 3.22. Adjon olyan nemtriviális gyűrűt, melyen az $x \mapsto x^n$ leképezés gyűrűhomomorfizmus valemely $n > 1$-re.

Feladat 3.23. Tekintsük a $\mathbf{Z}_2^3$ Abel-csoportot. Adjon meg ezen a csoporton 3 különböző olyan szorzást, amelyet a struktúrához hozzáadva gyűrű adódik.

Feladat 3.24. Mutassa meg, hogy az $(\mathbf{R}, +, -, *)$ gyűrűnek nincs nemkonstans nemidentikus homomorfizmusa önmagába. (Most az $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

Feladat 3.25. Határozza meg a $\mathbf{Z}_2$ feletti 2×2-es felső trianguláris mátrixok gyűrűjének automorfizmuscsoportját.

Feladat 3.26. Határozza meg a $\mathbf{Z}^2$ gyűrű automorfizmuscsoportját.

Feladat 3.27. Legyen $\mathbf{R}$, illetve $\mathbf{S}$ a $\mathbf{Z}_2$, iletve $\mathbf{Z}_4$ feletti 2×2-es mátrixok gyűrűje. Hány homomorfizmus van $\mathbf{R}$-ből $\mathbf{S}$-be?

Feladat 3.28. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy A additív részcsoportja *Lie-ideál*, ha bármely $a \in A$ és $r \in R$ esetén $ar - ra \in A$. Adja meg $\mathbf{Z}_2$ feletti 2×2-es felső trianguláris mátrixok gyűrűjében a Lie-ideálok hálóját.

Feladat 3.29. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy A additív részcsoportja *Lie-ideál*, ha bármely $a \in A$ és $r \in R$ esetén $ar - ra \in A$. Adja meg $\mathbf{Z}_2$ feletti 2×2-es alsó trianguláris mátrixok gyűrűjében a Lie-ideálok hálóját.

Feladat 3.30. Hány részgyűrűje van a $\mathbf{Z}_3$ feletti 3×3-as szigorúan alsó trianguláris mátrixok gyűrűjének?

Feladat 3.31. Legyenek $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ testek, m pozitív egész. Igaz, hogy ha az $m \times m$-es $\mathbf{K}_1$ feletti és $\mathbf{K}_2$ feletti mátrixgyűrűk izomorfak, akkor $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ is izomorfak?

Feladat 3.32. Létezik nemkommutatív négyelemű gyűrű?

Feladat 3.33. Tekintsük a $\mathbf{Z}_2$ feletti 3×3-as mátrixgyűrű

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemét. Van egy halmazunk, amelyben eredetileg csak az A mátrix van. Ezután újabb mátrixokat tehetünk a halmazba: ha egy X már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük egy tetszőleges mátrixszal vett szorzatát, ha pedig az X_1 és X_2 mátrixok benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük az $X_1 + X_2$ mátrixot. Hány euróra van szükségünk, hogy a gyűrű *bármely* elemét beletehessük a halmazba?

Feladat 3.34. Tekintsük a $\mathbf{Z}_2$ feletti 3×3-as mátrixgyűrű

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elemét. Van egy halmazunk, amelyben eredetileg csak az A mátrix van. Ezután újabb mátrixokat tehetünk a halmazba: ha egy X már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük egy tetszőleges mátrixszal vett szorzatát, ha pedig az X_1 és X_2 mátrixok benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük az $X_1 + X_2$ mátrixot. Hány euróra van szükségünk, hogy a gyűrű *bármely* elemét beletehessük a halmazba?

Feladat 3.35. Tekintsük a $\mathbf{Z}_2$ feletti 3×3-as mátrixgyűrű

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemét. Van egy halmazunk, amelyben eredetileg csak az A mátrix van. Ezután újabb mátrixokat tehetünk a halmazba: ha egy X már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük egy tetszőleges mátrixszal vett szorzatát, ha pedig az X_1 és X_2 mátrixok benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük az $X_1 + X_2$ mátrixot. Hány euróra van szükségünk, hogy a gyűrű *bármely* elemét beletehessük a halmazba?

Feladat 3.36. Legyen $\mathbf{R}$ tetszőleges gyűrű és $I_1, I_2, I_3 \lhd \mathbf{R}$ úgy, hogy $I_1 \subseteq I_2$, $I_1 \cap I_3 = I_2 \cap I_3$, valamint $I_1 + I_3 = I_2 + I_3$. Bizonyítsa be, hogy $I_1 = I_2$.

4. Hányadostestek, testbővítések

Feladat 4.1. Adja meg az $a = 2\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{3}$ szám minimálpolinomját $\mathbf{Q}$ fölött.

Feladat 4.2. Adja meg a $b = \sqrt[4]{3} + 5\sqrt{3} - 3$ szám minimálpolinomját $\mathbf{Q}$ fölött.

Feladat 4.3. Adja meg a $c = \sqrt[5]{2} - \sqrt{2}$ szám minimálpolinomját $\mathbf{Q}$ fölött.

Feladat 4.4. Adja meg a $d = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$ szám minimálpolinomját $\mathbf{Q}$ fölött.

Feladat 4.5. Adja meg az $e = \sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}$ szám minimálpolinomját $\mathbf{Q}$ fölött.

Feladat 4.6. Adja meg az $f = \sqrt[3]{4}\sqrt[4]{3} - 1$ szám minimálpolinomját $\mathbf{Q}$ fölött.

Feladat 4.7. Igaz, hogy $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$?

Feladat 4.8. Irreducibilis polinom a $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ testben $x^4 + 2x + 2$?

Feladat 4.9. Irreducibilis polinom a $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2} - 1)$ testben $x^4 - 2$?

Feladat 4.10. Adja meg $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{12})$ résztesteit.

Feladat 4.11. Adja meg $\mathbf{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ résztesteit.

Feladat 4.12. Adjon meg maximális ideált a 2×2-es racionális mátrixok gyűrűjében. Mi lesz (izomorfia erejéig) a vele vett faktor?

Feladat 4.13. Adjon meg egy integritástartományt, amelynek van nemtriviális valódi részgyűrűje, de nincs olyan nemtriviális valódi részgyűrűje, ami integritástartomány.

Feladat 4.14. Adjon meg két olyan, egymással nem izomorf testet, melyeknek van másodrendű automorfizmusa (tehát egy olyan nemidentikus σ automorfizmus, melyre teljesül $\sigma(\sigma(x)) = x$ minden x esetén).

Feladat 4.15. Legyen p prím, ami felírható két négyzetszám összegeként. Test $\mathbf{Z}_p/(x^2+1)$?

Feladat 4.16. Legyen p prím, ami nem írható fel két négyzetszám összegeként. Test $\mathbf{Z}_p/(x^2+1)$?

Feladat 4.17. A 4.31 feladat potenciális alkalmazásával döntse el, hogy a

$$\mathbf{Q}[x,y]/(x+y)$$

gyűrű integritástartomány-e.

Feladat 4.18. A 4.31 feladat potenciális alkalmazásával döntse el, hogy a

$$\mathbf{Q}[x,y]/(x+y)$$

gyűrű test-e.

Feladat 4.19. Igazolja, hogy az algebrai $\mathbf{L}|\mathbf{K}$ testbővítés akkor és csak akkor véges fokú, ha léteznek olyan $l_1, \ldots, l_n \in L$ elemek, melyekre $\mathbf{L} = \mathbf{K}(l_1, \ldots, l_n)$.

Feladat 4.20. Legyen $\mathbf{K}$ véges test. Igazolja, hogy ha $\mathbf{L}|\mathbf{K}$ egy algebrai, de nem véges fokú bővítés, akkor $\mathbf{L}$ elemeinek $\mathbf{K}$ feletti fokszámai nem alkotnak véges halmazt.

Feladat 4.21. Igazolja, hogy $\mathbf{Q}$ tetszőleges nemtriviális részgyűrűjének hányadosteste $\mathbf{Q}$.

Feladat 4.22. Legyen α algebrai szám. Bizonyítsa be, hogy α^2 fokszáma vagy megegyezik α fokszámával, vagy pedig fele annak.

Feladat 4.23. Legyen $\mathbf{K}(u)|\mathbf{K}$ testbővítés, $p \in \mathbf{K}[x]$ pedig egy legalább elsőfokú polinom. Igazolja, hogy ha $\mathbf{K}(u)|\mathbf{K}$ algebrai testbővítés, akkor $\mathbf{K}(p(u))|\mathbf{K}$ is az, míg ha $\mathbf{K}(u)|\mathbf{K}$ transzcendens, akkor $\mathbf{K}(p(u))|\mathbf{K}$ is transzcendens.

Feladat 4.24. Legyen $\mathbf{L}|\mathbf{K}$ testbővítés, $\alpha \in \operatorname{Aut} K$. Igazolja, hogy a

$$\{(k, \alpha(k)) : k \in K\}$$

résztestе $\mathbf{L}^2$-nek (vagyis olyan részgyűrűje az $\mathbf{L}^2$ gyűrűnek, ami test).

Feladat 4.25. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű *primitív*, ha bármely $I_1, I_2 \lhd \mathbf{R}$ esetén, amennyiben I_1 és I_2 különböznek $\{0\}$-tól, akkor $I_1 I_2$ is. Igazolja, hogy ha egy kommutatív egységelemes gyűrű primitív, akkor integritástartomány. Felhasználhatja, hogy egy elem annulátora–lásd a 3.15 feladatot–mindig ideál.

Feladat 4.26. Van olyan α algebrai szám, hogy minden n természetes szám esetén α^n harmadfokú?

Feladat 4.27. Létezik olyan $\mathbf{K}$ test, amelyre a $\mathbf{K}[x,y]/(x^2+y^2)$ gyűrű véges?

Feladat 4.28. Tegyük fel, hogy $\varphi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{S}$ egy szürjektív gyűrűhomomorfizmus. Igaz, hogy amennyiben $\mathbf{R}$ integritástartomány, akkor $\mathbf{S}$ is az?

Feladat 4.29. Egy $\mathbf{L}|\mathbf{Z}_2$ testbővítés esetén legyen $f(\mathbf{L})$ a $\mathbf{Z}_2$ fölötti $\mathbf{L}$-ben irreducibilis harmadfokú főpolinomok száma. Mik $f(\mathbf{L})$ lehetséges értékei?

Feladat 4.30. Legyen $\mathbf{K}$ test. Jelöljük $\mathbf{K}^\infty[x]$-szel a $\mathbf{K}$ feletti x határozatlanú formális hatványsorok (informálisan, végtelen polinomok) gyűrűjét. Adjon meg $\mathbf{K}^\infty[x]$-ben maximális ideált.

Feladat 4.31. Igazolja, hogy egy $f \in \mathbf{Q}[x, y]$ esetén $x + y \mid f$ akkor és csak akkor, ha $f(x, -x) = 0$.

Feladat 4.32. Tegyük fel, hogy $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ résztestek az $\mathbf{L}$ testben úgy, hogy $\mathbf{L}|(\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2)$ véges fokú bővítés, valamint $K_1 + K_2$ (komplexusösszeg) is résztest. Igazolja, hogy K_1 és K_2 közül az egyik tartalmazza a másikat.

Feladat 4.33. Tekintsük a $(\mathbf{Z}[x], +)$ Abel-csoportot. Megadható ezen a csoporton szorzás úgy, hogy a kapott struktúra test legyen?

Feladat 4.34. Tekintsük az $\mathbf{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ gyűrűt. Integritástartomány ez a gyűrű?

Feladat 4.35. Nevezzük *gyenge integritástartománynak* az egységelemes, zérusosztómentes gyűrűket, *ferdetestnek* pedig azokat az egységelemes gyűrűket, melyekben minden nemzéró elemnek van multiplikatív inverze. Igaz, hogy ha $\mathbf{R}$ egy véges gyenge integritástartomány, I pedig $\mathbf{R}$ egy maximális ideálja, akkor $\mathbf{R}/I$ ferdetest?

Feladat 4.36. Legyen $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots)$. Mutassa meg, hogy $\mathbf{K}$ elemei olyan algebrai számok, melyek fokszáma 2-hatvány.

Feladat 4.37. Legyen α_0 1-nél nagyobb abszolút értékű komplex algebrai szám, és minden $k > 0$-ra $\alpha_k \in \mathbf{C}$ olyan, hogy $\alpha_k^2 = \alpha_{k-1}$. Bizonyítsa be, hogy a $(\deg \alpha_k)_{k=0}^\infty$ sorozat nem korlátos. Felhasználható a 4.22 feladat.

Feladat 4.38. Legyen $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots)$. Létezik olyan negyedfokú racionális együtthatós polinom, amely $\mathbf{K}$ fölött irreducibilis?

Feladat 4.39. Igaz, hogy ha egy test minden valódi résztestе megszámlálható, akkor a test maga is megszámlálható?

Feladat 4.40. Van $\mathbf{R}$-nek olyan valódi részgyűrűje, amelynek hányadosteste $\mathbf{R}$?

5. Felbontási testek, véges testek

Feladat 5.1. Adjon meg egy izomorfizmust a $\mathbf{Z}_2[x]/(x^4 + x + 1)$ és a $\mathbf{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$ testek között.

Feladat 5.2. Adjon meg egy izomorfizmust a $\mathbf{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 + 2)$ és a $\mathbf{Z}_3[x]/(x^3 + 2x + 1)$ testek között.

Feladat 5.3. A $\mathbf{Z}_2[x]/(x^5+x^2+1)$ testben adja meg az $\overline{x^3 + 1}$ elem minimálpolinomját.

Feladat 5.4. A $\mathbf{Z}_2[x]/(x^5+x^2+1)$ testben adja meg az $\overline{x^4 + x^2}$ elem minimálpolinomját.

Feladat 5.5. Mennyi a multiplikatív rendje a $\mathbf{Z}_2[x]/(x^6 + x^5 + 1)$ testben az $\overline{x^5 + x^2 + x}$ elemnek?

Feladat 5.6. Mennyi a multiplikatív rendje a $\mathbf{Z}_2[x]/(x^6 + x^5 + 1)$ testben az $\overline{x^5 + x^3 + 1}$ elemnek?

Feladat 5.7. Tekintük a következő kódolást:

$$\mathbf{Z}_2^{10} \mapsto \mathbf{Z}_2^{19},\ (x_1,\dots,x_{10}) \mapsto (x_1, x_1+x_2, x_2, x_2+x_3, \dots, x_9, x_9+x_{10}, x_{10}).$$

Mennyi ennek a kódolásnak a minimális távolsága? (Vagyis legkevesebb hány bitben tér el két különböző bemenet képe?)

Feladat 5.8. Tekintük a következő kódolást:

$$\mathbf{Z}_2^{10} \mapsto \mathbf{Z}_2^{19},\ (x_1,\dots,x_{10}) \mapsto (x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1\dots x_{10}, x_2\dots x_{10}, \dots, x_{10}).$$

Mennyi ennek a kódolásnak a minimális távolsága? (Vagyis legkevesebb hány bitben tér el két különböző bemenet képe?)

Feladat 5.9. Tekintük a következő kódolást:

$$\mathbf{Z}_2^{10} \mapsto \mathbf{Z}_2^{45},\ (x_1,\dots,x_{10}) \mapsto (x_1+x_2, x_1+x_3, \dots, x_9+x_{10}).$$

Mennyi ennek a kódolásnak a minimális távolsága? (Vagyis legkevesebb hány bitben tér el két különböző bemenet képe?)

Feladat 5.10. Mennyi az $f = x^4 + x + 1$ polinom által meghatározott $\mathbf{Z}_2^{10} \mapsto \mathbf{Z}_2^{14}$ kódolás minimális távolsága? (Vagyis legkevesebb hány bitben tér el két különböző bemenet képe?)

Feladat 5.11. Mennyi az $f = x^5 + x^2$ polinom által meghatározott $\mathbf{Z}_2^{10} \mapsto \mathbf{Z}_2^{15}$ kódolás minimális távolsága? (Vagyis legkevesebb hány bitben tér el két különböző bemenet képe?)

Feladat 5.12. Mennyi az $f = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ polinom által meghatározott $\mathbf{Z}_2^{10} \mapsto \mathbf{Z}_2^{15}$ kódolás minimális távolsága? (Vagyis legkevesebb hány bitben tér el két különböző bemenet képe?)

Feladat 5.13. Legyen $\mathbf{K}$ nyolcelemű test, és $x \in K$. Tekintsük az $\operatorname{Aut}\mathbf{K} \mapsto K$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ leképezést. Hányféleképpen választhatom x-et a testben úgy, hogy ez a leképezés injektív legyen?

Feladat 5.14. Legyen $\mathbf{K}$ kilencelemű test, és $x \in K$. Tekintsük az $\operatorname{Aut}\mathbf{K} \mapsto K$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ leképezést. Hányféleképpen választhatom x-et a testben úgy, hogy ez a leképezés injektív legyen?

Feladat 5.15. Legyen $\mathbf{K}$ tizenhatelemű test, és $x \in K$. Tekintsük az $\operatorname{Aut}\mathbf{K} \mapsto K$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ leképezést. Választhatom úgy x-et a testben, hogy ez a leképezés injektív legyen?

Feladat 5.16. Hány tizedfokú irreducibilis polinom van $\mathbf{Z_2}$ felett?

Feladat 5.17. Hány hatodfokú irreducibilis polinom van $\mathbf{Z_3}$ felett?

Feladat 5.18. Hány negyedfokú irreducibilis polinom van a négyelemű test felett?

Feladat 5.19. Legyen $\mathbf{R}$ kommutatív gyűrű. Egy $r \in R$ elem *egység*, ha $rR = R$, vagyis minden $r_1 \in R$-re létezik olyan $r' \in R$, hogy $rr' = r_1$. Igazolja, hogy amennyiben egy kommutatív gyűrűnek van egysége, akkor az egységek halmaza a szorzásra nézve csoportot alkot.

Feladat 5.20. Igazolja, hogy amennyiben a $\mathbf{K}$ test karakterisztikája p, akkor az $x \mapsto x^p$ leképezés $\mathbf{K}$-ból $\mathbf{K}$-ba injektív gyűrűhomomorfizmus.

Feladat 5.21. Igazolja, hogy véges testben minden függvény polinomfüggvény, vagyis hogy tetszőleges $f : K \mapsto K$ leképezés esetén létezik egy $p \in \mathbf{K}[x]$ polinom, melyre $p(a) = f(a)$ teljesül minden $a \in K$-ra.

Feladat 5.22. Igazolja, hogy amennyiben p prímszám, és $a|b$, akkor egy p^b elemszámú testnek pontosan egy p^a elemszámú részteste van. Felhasználható az 5.20 feladat állítása.

Feladat 5.23. Legyen $p > 2$ prím és $n > 2$ természetes szám. Igazolja, hogy a p^n elemű $\mathbf{K}$ testben

$$\sum_{x \in K} x^2 = 0.$$

Feladat 5.24. Legyen $\mathbf{K}$ véges test, és $x \in K$. Igazolja, hogy akkor és csak akkor teljesül $\varphi(x) = x$ a $\mathbf{K}$ tetszőleges φ automorfizmusa esetén, ha x benne van $\mathbf{K}$ prímtestében.

Feladat 5.25. Létezik olyan $\mathbf{K}$ test és n természetes szám, amelyre nincs injektív n-ed fokú polinom $\mathbf{K}$ fölött? Mi a helyzet akkor, ha azt is feltesszük, hogy $\mathbf{K}$ véges?

Feladat 5.26. Van olyan gyűrű, aminek minden eleme része egy olyan részgyűrűnek, ami test, de maga a gyűrű nem test?

Feladat 5.27. Legyen $\mathbf{F}$ véges test, $m = \operatorname{char} F - 1$ illetve $a, b, c \in F$ primitív elemek. Teljesül a $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ azonosság a $\mathbf{Z}_m^*$ csoportban (tehát a redukált modulo m maradékosztályok Abel-csoportjában)?

Feladat 5.28. Legyenek p és q prímszámok. Mutassa meg, hogy a $\mathbf{Z}_p$ fölötti q-ad fokú irreducibilis polinomok száma $\frac{p^q - p}{q}$.

Feladat 5.29. Igazolja, hogy tetszőleges $f \in \mathbf{Z}_2[x]$ nemkonstans irreducibilis polinom esetén van olyan n, hogy az f által meghatározott $\mathbf{Z}_2^n \mapsto \mathbf{Z}_2^{n+\deg f}$ kódolás nem hibajavító.

Feladat 5.30. Igazolja, hogy egy gyűrű egy elem által generált részgyűrűje nem lehet végtelen test.

Feladat 5.31. Van olyan megszámlálható test, amelynek algebrai lezártja nem megszámlálható?

Feladat 5.32. Igaz, hogy ha $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \leq \mathbf{L}$, és az $\mathbf{L}$ algebrai lezártja mind a $\mathbf{K}_1$, mind a $\mathbf{K}_2$ testnek, akkor algebrai lezártja a $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ testnek is?

Feladat 5.33. Igazolja, hogy minden kommutatív egységelemes egyszerű gyűrű vagy test, vagy zérógyűrű (a zérógyűrű olyan gyűrű, ahol bármely két elem szorzata 0).