MBNK11: Vektorrendszerek rangja

(előadásvázlat, 2018. szeptember 11.)

Maróti Miklós

Az előadás megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: vektor, lineáris kombináció, kifeszített vektorhalmaz.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Wettl Ferenc: Lineáris algebra, TypoTex, 2011.
- Szabó László: Bevezetés a lineáris algebrába, Polygon, 2006.
- Essence of linear algebra: chapter 2.

1. Vektorrendszerek rangja

1. Definíció. Vektorrendszernek nevezzük a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok (rendezett) felsorolástát. Megengedjük a nulla hosszú vektorrendszert is, azaz a $k = 0$ esetet.

2. Definíció. A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorrendszer $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ lineáris kombinációja triviális, ha $c_1 = 0, \dots, c_k = 0$. A lineáris kombináció nem triviális ha létezik olyan $1 \le i \le k$ egész, hogy $c_i \ne 0$.

3. Példa. Minden triviális lineáris kombináció a nullvektort adja, de nem minden nullvektort adó lineáris kombináció triviális.

4. Megjegyzés. A nulla hosszú vektorrendszernek csak egyetlen egy lineáris kombinációja van amely triviális (mert nincs olyan index amelyre $c_i \ne 0$).

5. Definíció. A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorrendszer lineárisan független, ha a nullvektor csak triviális módon állítható elő lineáris kombinációként. A vektorrendszer lineárisan függő, ha létezik nem triviális nullvektort adó lineáris kombináció.

6. Tétel. A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha $[\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k]$ minden vektora egyértelműen írható fel lineáris kombinációként.

7. Tétel. A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, akkor valamelyik vektora kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

8. Példa. Tetszőleges $\mathbf{v}$ (térbeli) vektorra a következők ekvivalensek:

(1) a $\mathbf{v}$ vektorrendszer lineárisan független,
(2) $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$,
(3) $[\mathbf{v}]$ egy egyenes pontjainak halmaza.

9. Példa. Tetszőleges $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (térbeli) vektorokra a következők ekvivalensek:

(1) a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vektorrendszer lineárisan független,
(2) semelyik sem skalárszorosa a másiknak,
(3) $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ egy sík pontjainak halmaza.

10. Példa. A nulla hosszú vektorrendszer lineárisan független, mert minden lineáris kombinációja triviális, és az általa feszített vektorhalmaz csak az origót tartalmazza.

11. Megjegyzés. A fenti példákból az látszik, hogy a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha az általuk feszített $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$ vektorhalmaz „k-dimenziós” (0-dimenziós a pont, 1-dimenziós az egyenes, 2-dimenziós a sík). A dimenzió fogalmát szeretnénk pontosabban definiálni, és megérteni illetve kiszámolni, hogy $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$ hány „dimenziós” ponthalmaz általában.

12. Definíció. Az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ vektorrendszer részrendszere a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorrendszernek ha léteznek olyan $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le k$ egészek, hogy $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_r = \mathbf{v}_{i_r}$.

13. Példa. A $(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(0,0,0)$ vektorrendszernek 7 részrendszere van: $(0,0,0)$ amely lineárisan függő, $(1,2,3)$ mely lineárisan független, a $(0,0,0)$, $(1,2,3)$ amely lineárisan függő, az $(1,2,3)$, $(0,0,0)$ amely lineárisan függő, a $(0,0,0)$, $(0,0,0)$ amely lineárisan függő, $(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(0,0,0)$ amely lineárisan függő, és a null hosszú vektorrendszer amely lineárisan független.

14. Tétel. Lineárisan független vektorrendszer minden részrendszere is lineárisan független.

15. Lemma. Lineáris kombinációk lineáris kombinációja az eredeti vektoroknak is lineáris kombinációja, azaz ha $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$, akkor $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r] \subseteq [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$.

16. Lemma. A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorrendszer minden tartalmazásra nézve maximális lineárisan független $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ részrendszerére $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r] = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$.

17. Tétel. Minden $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorrendszernek van olyan lineárisan független $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ részrendszere, amely ugyan azt a vektorhalmazt feszíti ki.

18. Példa. Tekintsük a $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1,1,0)$ és $\mathbf{v}_4 = (0,1,-1)$ vektorrendszert a térben. A $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, a $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ és a $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ részrendszerek lineárisan függetlenek és mindegyikük kifeszíti a $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ vektorhalmazt. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ illetve a $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ részrendszerek nem lineárisan függetlenek.

19. Megjegyzés. Most már tudjuk, hogy minden vektorrendszer által feszített vektorhalmazhoz található olyan lineárisan független részrendszer, amely ugyan azt a vektorhalmazt feszíti ki, de ez a részrendszer nem egyértelmű. Az a sejtésünk, hogy legalább a részrendszer hossza egyértelmű lesz, és ez adja meg majd a dimenzió fogalmát. Ehhez meg kell vizsgálnunk azokat a linárisan független vektorrendszereket amelyek a feszített vektorhalmazból valók, de nem feltétlen részrendszerek.

20. Lemma (Kicserélési tétel). Ha $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$ és az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ vektorrendszer lineárisan független, akkor tetszőleges $\mathbf{u}_i$ vektor kicserélhető egy $\mathbf{v}_j$ vektorral úgy, hogy az

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_r$$

vektorrendszer továbbra is lineárisan független marad.

21. Tétel. Ha az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$ vektorrendszer lineárisan független, akkor $r \leq k$.

22. Következmény. Ha az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ és $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ lineárisan független vektorrendszerek ugyan azt a vektorhalmazt feszítik ki, akkor $r = k$.

23. Definíció. A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer rangja az az egyértelműen meghatározott r egész szám ($0 \leq r \leq k$), amelyre létezik olyan $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ részrendszer hogy $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r] = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$.

24. Példa. Legyenek $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ térbeli vektorok. Ekkor $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$

(1) akkor és csak akkor $\mathbf{0}$, ha a rang 0,
(2) akkor és csak akkor egy egyenes pontjainak halmaza, ha a rang 1,
(3) akkor és csak akkor egy sík pontjainak halmaza, ha a rang 2,
(4) akkor és csak akkor feszíti ki az egész $\mathbb{R}^3$ teret, ha a rang 3.