MBNK11: Lineáris egyenletrendszerek

(előadásvázlat, 2018. szeptember 24.)

Maróti Miklós

Az előadás megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: vektor, lineáris kombináció, kifeszített vektorhalmaz.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Wettl Ferenc: Lineáris algebra, TypoTex, 2011.
- Szabó László: Bevezetés a lineáris algebrába, Polygon, 2006.

Lineáris egyenletrendszerek

1. Definíció. Az

$$(*)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszert m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek nevezzük, ahol az $a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$ elemek az együtthatók, a $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ elemek a konstansok, és az $x_1, \dots, x_n$ változók az ismeretlenek. A lineáris egyenletrendszernek a $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor megoldása, ha az $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ helyettesítést elvégezve a kapott egyenlőségek teljesülnek.

2. Példa. Egy egyenletrendszernek lehet nulla (pl. $0x_{11} = 1$), egy (pl. $1x_{11} = 1$) vagy akár végtelen sok (pl. $0x_{11} = 0$) megoldása is.

3. Definíció. A lineáris egyenletrendszer homogén, ha a konstansok mind nullák. A $(*)$ lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszer alatt az

$$(**)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert értjük.

4. Tétel. Legyen a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ vektor a $(*)$ lineáris egyenletrendszernek egy tetszőleges megoldása. Ekkor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor megoldása $(*)$-nak, ha $\mathbf{c} - \mathbf{d}$ megoldása a hozzá tartozó homogén $(**)$ lineáris egyenletrendszernek.

5. Definíció. Az átláthatóság kedvéért szokás az egyenletrendszer helyett csak az együtthatóit és konstansait megadni. A $(*)$ lineáris egyenletrendszernek az együttható mátrixa illetve bővített mátrixa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

6. Tétel. A $(*)$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$(b_1, \dots, b_m) \in [(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nm})],$$

azaz a bővített mátrix konstansokat tartalmazó utolsó oszlopvektora megkapható az együtthatókat tartalmazó első n oszlopvektor lineáris kombinációjaként.

7. Megjegyzés. Megengedjük a nulla egyenletből álló egyenletrendszert is, amelynek minden $(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ vektor megoldása. Mint ahogy megengedjük a nulla tagú lineáris kombinációt, megengedhetjük a nulla változós egyenletrendszert is az előző tétel alapján. Ekkor például az egy egyenletből álló nulla ismeretlenes $0=1$ egyenletnek nincsen megoldása, míg az egy egyenletből álló nulla ismertelenes $0=0$ egyenletrendszernek egy megoldása van.

8. Definíció. Egy lináris egyenletrendszer egyenleteinek (mátrixának) elemi átalakításai:

(1) egyik egyenlet (sor) nemnulla skalárral való szorzása,
(2) egyik egyenlet (sor) valahányszorosának hozzáadása egy másik egyenlethez (sorhoz), illetve
(3) két egyenlet (sor) felcserélése.

9. Tétel. Elemi átalakítások során a lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza nem változik.

Bizonyításvázlat. Minden elemi átalakítás elemi átalakítással visszacsinálható, ezért elég megmutatni, hogy ha $\mathbf{c}$ megoldása $(*)$-nak, akkor $\mathbf{c}$ továbbra is megoldás marad egy elemi átalakítás után. ☐

10. Definíció. Egy mátrix lépcsős alakú, ha

(1) miden sor első nemnulla eleme 1, ezek a vezér 1-esek,
(2) a nagyobb indexű sorokban a vezér 1-esek nagyobb indexű oszlopokban vannak (lépcső),
(3) a vezér 1-esek oszlopában minden más elem nulla,
(4) a mátrix többi eleme bármi lehet.

11. Példa. Példa lépcsős alakú mátrixra

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & ? & ? & 0 & ? & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & ? & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

12. Tétel (Gauss-elimináció). Minden mátrix a sorainak elemi átalakításával lépcsős alakra hozható.

13. Tétel. Legyen a $(*)$ lineáris egyenletrendszer bővített mátrixa lépcsős alakú.

(1) Ha van vezér 1-es az utolsó oszlopban (a konstansok oszlopa), akkor nincsen megoldás, mert az az egyenlet $0=1$ alakú.
(2) Ha nincs vezér 1-es az utolsó oszlopban, de minden más oszlopban van (az együtthatók oszlopai), akkor az egyenlet $x_1=b_1,\dots,x_n=b_n$ alakú és csak ez az egy megoldás van.
(3) Ha nincs vezér 1-es az utolsó oszlopban, és van olyan más oszlop amelyben nincsen vezér egyes, akkor ezen oszlopokhoz tartozó változók szabadon választhatók (végtelen sok megoldás), és a vezér 1-esekhez tartozó ismeretlenek kötött változók, mert a szabad változók értékeinek ismeretében egyértelműen meghatározhatók.

14. Tétel. A Gauss-elimináció praktikus algoritmust ad lineáris egyenletrendszer megoldásának kiszámítására. A kapott lépcsős alak olyan egyenletrendszert ad, amelyből

(1) ugyan az a megoldáshalmaza mint az eredetinek,
(2) nem lehet elhagyni semelyik egyenletét anélkül, hogy a megoldáshalmaz ne növekedjen,
(3) könnyen leolvasható az általános megoldás szabad és kötött változók segítségével,
(4) könnyen megadható a megoldások halmaza egy feszített vektorrendszer eltoltjaként,

Feszített vektorrendszerek

15. Tétel. Elemi átalakítások során a mátrix sorai által feszített vektorhalmaz nem változik.

16. Tétel. Írjuk a $v_1,\dots,v_m\in\mathbb{R}^n$ vektorokat egy mátrix soraiba, és végezzük el a Gauss-eliminációt. A kapott lépcsős alakú mátrix olyan, hogy

(1) ugyan azt a vektorhalmazt feszíti ki mint az eredeti,
(2) nem lehet semelyik vektorát elhagyni úgy, hogy a feszített vektorhalmaz ne csökkenjen,
(3) könnyen megadható a feszített vektorhalmaz szabad és kötött változók segítségével,

(4) könnyen megadható a feszített vektorhalmaz egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazaként.

17. Következmény. Egy vektorhalmaz akkor és csak akkor adható meg feszített vektorhalmazként ha megadható homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazaként. Egy vektorhalmaz akkor és csak akkor adható meg feszített vektorhalmaz eltoltjaként ha megadható lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazaként.