6. feladatsor – Lineáris leképezések

6.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

°(a) Minden mátrixleképezés lineáris.
°(b) Van olyan $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, ami nem mátrixleképezés.
°(c) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterének van olyan lineáris transzformációja, amelynek magtere és képtere is kétdimenziós.
(d) Bármely vektortér összes injektív lineáris transzformációja szürjektív is.
(e) Ha az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjára teljesül, hogy $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$, akkor φ szürjektív.
(f) Ha a $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés képtere kétdimenziós, akkor φ szürjektív, de nem injektív.
(g) Ha a $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés rangja 2, akkor φ nem injektív és nem szürjektív.
°(h) Ha a $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés rangja 2, akkor $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$.
°(i) Bármely két lineáris leképezésnek értelmezve van az összege.
(j) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén definiált bármely két lineáris transzformáció összegének rangja legfeljebb akkora, mint az egyes tagok rangja.
°(k) Minden vektortéren van olyan lineáris transzformáció, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.
°(l) Minden lineáris leképezés rangja egyenlő bármely mátrixának rangjával.
°(m) Bármely két azonos típusú mátrix összegének rangja legfeljebb akkora, mint a tagok rangjának minimuma.
(n) Bármely két azonos típusú négyzetes mátrix szorzatának rangja legfeljebb akkora, mint az egyes tényezők rangjának összege.
°(o) A bázisáttérés mátrixának determinánsa nem 0.
(p) Egy négyzetes mátrixnak pontosan akkor sajátértéke a 0 szám, ha a mátrix nemelfajuló.
°(q) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátértéke.
°(r) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek sajátértéke a 2 szám.
°(s) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén egyetlen olyan lineáris transzformáció van, amelynek sajátértéke a 2 szám, és amelyben a 2-höz tartozó sajátaltér kétdimenziós.
°(t) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek sajátértéke a 2 szám, és amelyben a 2-höz tartozó sajátaltér egydimenziós.
(u) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek egyetlen sajátértéke a 2 szám, és amelyben a 2-höz tartozó sajátaltér egydimenziós.
(v) Két azonos típusú négyzetes mátrix pontosan akkor hasonló, ha mindkettő egy-egy lineáris transzformáció mátrixa valamely bázisban.
°(w) Hasonló mátrixok nyoma és sajátértékei megegyeznek.
°(x) Vannak olyan hasonló mátrixok, amelyek rangja különböző.
°(y) Minden lineáris transzformációnak diagonális a mátrixa valamely bázisban.
(z) Ha két négyzetes mátrix karakterisztikus polinomja azonos, akkor a mátrixok hasonlók.

6.2. Feladat. Tekintsük az alábbi φ geometriai transzformációkat, illetve leképezéseket.

°(1) Állapítsa meg φ-ről, hogy mátrixleképezés-e, és ha igen, akkor adja meg, mely mátrixhoz tartozik.
°(2) Határozza meg φ magterét és képterét, valamint ezek dimenzióját. Mekkora φ rangja?
(3) Döntse el, hogy φ injektív-e, szürjektív-e és vektortér-izomorfizmus-e.

(a) A sík vektorainak eltolása a $(1, 1)$ vektorral;
(b) a sík vektorainak tükrözése az x-tengelyre;
(c) a sík vektorainak merőleges vetítése az y-tengelyre;
(d) a sík vektorainak $\pi/2$ szögű elforgatása az origó körül;
(e) a tér vektorainak eltolása a $(0, 0, 0)$ vektorral;
(f) a sík vektorainak tükrözése az $y = x$ egyenesre;
(g) a tér vektorainak tükrözése az x, y-tengelyek síkjára;

(h) a tér vektorainak merőleges vetítése az x, y-tengelyek síkjára;
(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)$;
(j) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y)$;
(k) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, -4x + 8y)$;
(l) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y + 1, x + z)$;
(m) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_3, x_2, x_4)$;
(n) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + cx_3, x_2 + cx_4, x_3, x_4)$, ahol $c \in \mathbb{R}$;
(o) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$;
(p) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3 + 4x_4, x_4 + 5x_5)$.

6.3. Feladat.

°(1) Adjon meg olyan $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, amely rendelkezik a megadott tulajdonsággal.
(2) Vizsgálja meg, hogy létezik-e injektív, szürjektív, illetve bijektív φ lineáris transzformáció a megadott tulajdonsággal, és ha igen, akkor adjon meg ilyet is.

(a) $m = 2,\ n = 3$; $(1, 1, 3) \in \operatorname{Im}\varphi$;
(b) $m = 2,\ n = 3$; $(2, -1) \in \operatorname{Ker}\varphi$ és φ nemtriviális;
(c) $m = n = 3$; $r(\varphi) \geq 2$;
(d) $m = n = 3$; $(1, 1, 3)\varphi = (1, 1, 5)\varphi$ és φ nemtriviális;
(e) $m = n = 3$; $(-1, 2, -1), (0, 1, 0) \in \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$.

6.4. Feladat. Adjon meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén olyan φ és ψ lineáris transzformációkat, amelyek rendelkeznek a megadott tulajdonsággal:

(a) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$;
(b) φ és ψ olyan transzformációk, melyek magtere azonos dimenziójú, de két különböző altér $\mathbb{R}^2$-ben;
(c) φ és ψ olyan transzformációk, melyek képtere azonos dimenziójú, de két különböző altér $\mathbb{R}^2$-ben.

6.5. Feladat°. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortéren megadott φ és ψ lineáris transzformációkat. Milyen „ismert” lineáris transzformációval egyenlő a $\varphi\psi$ lineáris transzformáció?

(a) $n = 2$, φ a zérustranszformáció, ψ az identikus transzformáció;
(b) $n = 2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó tükrözés;
(c) $n = 2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(d) $n = 2$, φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
(e) $n = 2$, φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/2$ szögű forgatás;
(f) $n = 3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára vonatkozó tükrözés;
(g) $n = 3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára való merőleges vetítés;
(h) $n = 2$, φ az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözés, $\psi = \mu_A$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
(i) $n = 2$, $\varphi = \mu_A$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés.

6.6. Feladat°. Határozza meg a $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések alábbi lineáris kombinációit:

(a) $3\varphi + \psi$, ahol $m = n = 2$, valamint $\varphi\colon (x, y) \mapsto (x - y,\ x + 3y)$ és $\psi\colon (x, y) \mapsto (x + 3y,\ 2x - y)$;
(b) $2\varphi - 4\psi$, ahol $m = n = 3$, valamint $\varphi\colon (x, y, z) \mapsto (2x - y,\ x + y,\ 3x - 2y - z)$ és $\psi\colon (x, y, z) \mapsto (-x + 8y - 2z,\ 3y - z,\ 4y - 2z)$;
(c) $\varphi + \psi$, ahol $m = n = 2$, és φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való tükrözés;
(d) $\varphi - \psi$, ahol $m = n = 2$, és φ az y-tengelyre, ψ az x-tengelyre való merőleges vetítés;
(e) $\varphi - 2\psi$, ahol $m = n = 3$, és φ az x, y-tengelyek síkjára való tükrözés, ψ pedig az x, y-tengelyek síkjára való merőleges vetítés;
(f) $2\varphi + 3\psi$, ahol $m = 3,\ n = 2$, valamint $\varphi\colon (x, y, z) \mapsto (-x + 6y,\ 2z)$, ψ pedig az x, y-tengelyek síkjára való merőleges vetítés.

6.7. Feladat.

°(1) Döntse el, hogy izomorfak-e a megadott U és V vektorterek.

(2) Ha igen, akkor adjon is meg egy izomorfizmust U-ról V-re vagy fordítva.

(a) $U = \mathbb{R}^2$, $V = [(1,-2,0),(2,-3,-2),(-1,-1,6)] \subseteq \mathbb{R}^3$;
(b) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
(c) $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0,\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$, $V = \mathbb{R}^3$;
(d) $U = [(1,-2,3,0),(0,-4,1,2),(-2,8,-7,-2)] \subseteq \mathbb{R}^4$,
$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,\ x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 0,$
$2x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Tekintsük a következő bázisokat a megadott vektorterekben:

(1) $\mathbb{R}^2$; $\mathcal{E}\colon (1,0),(0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,-1),(-1,0)$;
(2) $\mathbb{R}^3$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)$;
(3) $\mathbb{R}^4$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$
$\mathcal{F}\colon (1,0,-1,2),(0,1,-1,0),(1,0,0,1),(0,-1,1,2)$.

Tekintsük a következő lineáris transzformációkat, illetve leképezéseket:

(A) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az identikus transzformáció;
(B) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a zérustranszformáció;
(C) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a tükrözés az x-tengelyre;
(D) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az y-tengelyre;
(E) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(F) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a tükrözés az x,y-tengelyek síkjára;
(G) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a merőleges vetítés az x,y-tengelyek síkjára;
(H) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a $\pi/2$ szögű forgatás a z-tengely körül;
(I) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+3y,\ 2x-y)$;
(J) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x-y,\ x+3y)$;
(K) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (2x-y,\ x+y,\ 3x-2y-z)$;
(L) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (-x+8y-2z,\ 3y-z,\ 4y-2z)$;
(M) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (-3x+5y+z,\ x+y-9z,\ -4z)$;
(N) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,u,v) \mapsto (0,\ x,\ x-2y+u,\ u+2v)$;
(O) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,u,v) \mapsto (x,\ -2x+2y-3u,\ 3x-4y+u,\ 3y-5u+3v)$;
(P) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az x,y-tengelyek síkjára;
(Q) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (-x+6y,\ 2z)$;
(R) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (7x-2y,\ 3x-y,\ 4x-2y)$;
(S) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,u,v) \mapsto (-x-u+2v,\ 2x+y+4u-5v,\ x-y-u-v)$.

6.8. Feladat°. Határozza meg a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések mátrixát a fent megadott $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{F}$ bázisokban. (Pontosabban minden φ esetén két mátrixot kell megadni; ha pl. $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$, akkor $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{E}_{(2)}}$-t és $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)},\mathcal{F}_{(2)}}$-t, ahol $\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{F}_{(1)}$ az (1)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_{(2)},\mathcal{F}_{(2)}$ pedig a (2)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$.)

6.9. Feladat°.

(a) Határozza meg a fenti $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok esetén az áttérés mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra, valamint az $\mathcal{F}$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra.
(b) Adja meg az alábbi v vektorok és a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések esetén a $v\varphi$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, illetve bázispárban:
(A)–(E),(I),(J),(R): $v = (1,-3)$;
(F)–(H),(K)–(M),(P),(Q): $v = (2,2,0)$;
(N),(O),(S): $v = (1,-1,1,0)$.

6.10. Feladat. Adja meg a síkban az alábbi e egyenes és P pont esetén a P pont e-re vonatkozó tükörképét először elemi geometria módszerekkel, majd lineáris transzformációkat használva:

(a) $e\colon x-y=0,\ P=(-4,1)$;
(b) $e\colon x-3y=0,\ P=(7,-1)$;
(c) $e\colon 2x+y=0,\ P=(3,4)$.

6.11. Feladat. Adja meg a síkban az alábbi α szög és P pont esetén a P pont képét az origó körüli α szögű elforgatás mellett először elemi geometria módszerekkel, majd lineáris transzformációkat használva:

(a) $\alpha=-\frac{3\pi}{4},\ P=(-1,-2)$;
(b) $\alpha=\frac{3\pi}{4},\ P=(1,-1)$;
(c) $\alpha=-\frac{2\pi}{3},\ P=(3,4)$.

6.12. Feladat. Határozza meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterének összes olyan lineáris transzformációját, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.

6.13. Feladat°. Döntse el, hogy az u, illetve v vektor sajátvektora-e az A mátrixnak. Amennyiben igen, határozza meg az u, illetve v vektort tartalmazó sajátaltér dimenzióját.

(a) $u=(1,-2,3),\ v=(2,0,-1),\ A=\begin{pmatrix}4&-4&5\\1&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$;

(b) $u=(1,-4,0,2),\ v=(2,0,-1,3),\ A=\begin{pmatrix}-2&6&4&6\\1&-3&2&3\\7&9&10&21\\1&-1&2&-1\end{pmatrix}$;

(c) $u=(1,-3,4,1,-1),\ v=(2,-1,4,5,0),\ A=\begin{pmatrix}2&4&-1&1&0\\2&-2&4&-4&1\\1&-2&1&3&4\\2&3&2&1&2\\3&2&-3&1&-2\end{pmatrix}$.

6.14. Feladat°. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e az A mátrixnak. Amennyiben igen, adjon meg bázist a hozzá tartozó sajátaltérben:

(a) $\lambda=-3,\ A=\begin{pmatrix}-2&2&-4\\-2&-9&14\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$;

(b) $\lambda=2,\ A=\begin{pmatrix}1&-4&2&0\\0&-1&3&4\\-2&3&1&4\\1&2&-1&3\end{pmatrix}$;

(c) $\lambda=4,\ A=\begin{pmatrix}2&1&3&4&5\\1&4&-4&2&3\\5&-3&-3&-8&-14\\-6&2&9&23&14\\3&0&-4&-18&-3\end{pmatrix}$.

6.15. Feladat. Tekintsük az alábbi A mátrixokat.

°(1) Határozza meg A karakterisztikus polinomját és sajátértékeit.
°(2) Adjon meg bázist A sajátaltereiben.
°(3) Állapítsa meg, hogy A diagonalizálható-e, és ha igen, akkor adjon meg olyan D diagonális mátrixot, amely hasonló A-hoz.
(4) Ha A diagonalizálható, akkor adjon meg olyan P mátrixot, amelyre $D=P^{-1}AP$.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 19 & 5 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

(f) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & 7 & -1 \\ 10 & -5 & 8 & 0 \\ 10 & -5 & 18 & -10 \\ 20 & -10 & 36 & -20 \end{pmatrix}$.

6.16. Feladat. Határozza meg a fenti (A)–(O) lineáris transzformációk sajátértékeit, és adjon meg bázist a sajátalterekben. Állapítsa meg, hogy diagonális-e a transzformációk mátrixa valamely bázisban.

Szorgalmi feladatok

6.17. Feladat. Adjon meg olyan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ lineáris transzformációkat az $\mathbb{R}^n$ vektortéren, amelyekre $\varphi_i^2 \neq \underline{\underline{0}}$ $(1 \leq i \leq n)$, és $\varphi_i\varphi_j = \underline{\underline{0}}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$.

6.18. Feladat. Legyenek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ olyan lineáris transzformációk az $\mathbb{R}^n$ vektortéren, amelyekre $\varphi_i^2 \neq \underline{\underline{0}}$ $(1 \leq i \leq k)$, és $\varphi_i\varphi_j = \underline{\underline{0}}$ $(1 \leq i \neq j \leq k)$. Bizonyítsa be, hogy $k \leq n$.

6.19. Feladat. Létezik-e a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett olyan φ lineáris transzformáció, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok? Ha létezik, akkor adjon meg egy-egy ilyen transzformációt, ha pedig nem létezik, akkor indokolja, miért nem.

(a) $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \emptyset$;
(b) $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\underline{0}\}$;
(c) $\operatorname{Ker}\varphi \subsetneq \operatorname{Im}\varphi$;
(d) $\operatorname{Im}\varphi \subsetneq \operatorname{Ker}\varphi$;
(e) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

6.20. Feladat. Mennyi lehet egy $\varphi\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképezés magjának dimenziója? Adjon meg egy-egy példát a legkisebb és a legnagyobb értékre.

6.21. Feladat. A $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy

(1) bármely négy elem képe lineárisan függő vektorrendszert alkot;
(2) bármely hat lineárisan független U-beli elem között van olyan, amelynek képe nem a zérusvektor.

Mekkora lehet U dimenziója?

6.22. Feladat. Adottak a V vektortérben az U és W alterek. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék olyan φ lineáris transzformáció, amelyre $\operatorname{Ker}\varphi = U$ és $\operatorname{Im}\varphi = W$?

6.23. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér összes olyan lineáris transzformációját, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.

6.24. Feladat. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{pmatrix}$$

mátrixnak az a paraméter mely értékei esetén

(a) sajátvektora az $(1, -1, a)$ vektor;
(b) van $(0, b, a)$ alakú sajátvektora, ahol $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges?

6.25. Feladat. Adja meg az a paraméter azon értékeit, melyekre

(a) 2 nem sajátértéke;
(b) nincs sajátértéke az

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixnak.

6.26. Feladat. Határozza meg annak az $n\times n$-es mátrixnak a sajátértékeit és sajátaltereit, amelynek főátlójában minden elem 0, a többi elem pedig 1. Diagonalizálható-e ez a mátrix?

6.27. Feladat. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix esetén tekintsük a következő adatokat:
(1) A determinánsa és nyoma;
(2) A sajátértékei;
(3) A karakterisztikus polinomja.
Mi a kapcsolat a közöttük? (Pl. (1) ismeretében megkaphatjuk-e, és ha igen, hogyan, a (2)-beli és a (3)-beli adatokat?)

6.28. Feladat. Adja meg az összes olyan (D, S) számpárt, melyre pontosan egy olyan 2×2-es mátrix létezik, amelynek determinánsa D, és amely sajátértékeinek összege S.

6.29. Feladat. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén adjon meg olyan $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(1 \leq k \leq n)$ mátrixot, amelynek karakterisztikus polinomja $(\lambda - x)^n$, és a λ-hoz tartozó sajátaltere k dimenziós.

6.30. Feladat. Legyen λ sajátértéke az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak. Igazolja tetszőleges f polinom esetén, hogy ha $f(A) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.

6.31. Feladat. Legyenek az A mátrix páronként különböző sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Adja meg a következő mátrix sajátértékeit:
(a) A^2,
(b) A^{-1} (ha létezik).

6.32. Feladat. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mutassa meg, hogy
(1) ha A diagonalizálható, akkor A^{T} is az;
(2) ha A diagonalizálható, akkor tetszőleges f polinom esetén $f(A)$ is az;
(3) ha 0 nem sajátértéke A-nak és AB diagonalizálható, akkor BA is az.