# 5. feladatsor – Determinánsok

**5.1. Feladat.** Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

°(a) Ha egy $n \times n$-es mátrix determinánsa nem 0, akkor legalább $n$ nem 0 eleme van.

(b) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.

(c) Ha egy $2 \times 2$-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora a másik sorának skalárszorosa.

(d) Ha egy $2 \times 2$-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora a másik sorának skalárszorosa.

(e) Ha egy $3 \times 3$-as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának skalárszorosa.

(f) Ha egy mátrix minden eleme egész szám, és a determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.

(g) Ha egy mátrix minden eleme egész szám, és a determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.

°(h) Ha egy lineáris egyenletrendszer annyi egyenletet tartalmaz, mint ahány ismeretlenje van, és az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor az egyenletrendszer együtthatóiból álló determináns 0.

°(i) Ha egy lineáris egyenletrendszer annyi egyenletet tartalmaz, mint ahány ismeretlenje van, és az egyenletrendszer együtthatóiból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

Tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén

(j) ha $A, B$ nemelfajuló, akkor $A + B$ is az;

(k) ha $A, B$ elfajuló, akkor $A + B$ is az;

°(l) ha $A, B$ nemelfajuló, akkor $AB$ is az;

°(m) ha $A, B$ elfajuló, akkor $AB$ is az.

**5.2. Feladat°.** Minél egyszerűbben határozza meg a következő determinánsokat:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -11 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$;

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

**5.3. Feladat°.** Számolja ki a következő determinánsokat, törekedve a minél rövidebb megoldásra:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$;

(f) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & -4 \\ -3 & -5 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & -5 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ -4 & 6 & 8 & -3 \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 6 & 9 & 27 & 81 \end{vmatrix}$; (i) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix}$.

**5.4. Feladat.** Határozza meg $x^3$ együtthatóját az alábbi determinánsban anélkül, hogy a determináns értékét meghatározná:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

**5.5. Feladat.** Számítsa ki a következő $n \times n$-es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

**5.6. Feladat°.** Adja meg a $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ vektorok által meghatározott paralelogramma területét és a $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát.

(a) $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (1, 0)$;
(b) $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 1)$;
(c) $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 1, -4)$, $v_3 = (1, 0, 3)$;
(d) $v_1 = (1, 8, 5)$, $v_2 = (-2, 5, 11)$, $v_3 = (5, 9, 12)$.

**5.7. Feladat°.** A 2.2 Feladatban szereplő lineáris egyenletrendszereket, ha lehetséges, oldja meg Cramer-szabállyal.

**5.8. Feladat°.** Határozza meg a **??** Feladatban szereplő mátrixok inverzét az adjungáltakat tartalmazó képlet segítségével.

### Szorgalmi feladatok

**5.9. Feladat.** Legyen $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{ha } i \neq j; \\ 2, & \text{ha } i = j. \end{cases}$ Számítsa ki az $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ mátrix determinánsát.

**5.10. Feladat.** Ha olyan nemnulla determinánsú $n\times n$-es mátrixot akarunk felírni, amelyben minden elem 0 vagy 1, akkor legalább hány 0-t kell felhasználnunk?

*A következő feladatokban a determinánsok értékét kell kiszámolni; ha nem derül ki a determináns rendje, akkor $n$-edrendűnek kell tekinteni.*

**5.11. Feladat.**

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

**5.12. Feladat.**

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

**5.13. Feladat.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

**5.14. Feladat.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

**5.15. Feladat.** Számítsa ki a következő determinánst a determináns kifejtése nélkül:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

**5.16. Feladat.** A determinánsok kifejtése nélkül igazolja, hogy

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**5.17. Feladat.** Egy $A$ mátrixot *ferdén szimmetrikusnak* nevezünk, ha $A^{\mathrm{T}} = -A$. Bizonyítsa be, hogy ha $n$ páratlan, akkor bármely ferdén szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix determinánsa 0.

**5.18. Feladat.** Legyen $f_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + \cdots + a_{in}x^n$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, ahol $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. Képezzük az együtthatókból a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánst, és legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ rögzített számok. Adja meg az

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

determináns értékét $D, x_1, \dots, x_n$ segítségével. ($D$-t nem kell kiszámolni!)

**5.19. Feladat.** A determináns sorainak/oszlopainak átalakítása nélkül számítsa ki a

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$$

determinánst.

**5.20. Feladat.** Bizonyítsa be, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén $|A|$ felírható olyan $n!$-tagú összegként, ahol a tagok az összes olyan $n$-tényezős szorzatok $+$ vagy $-$ előjellel, melyekben minden sorból és minden oszlopból egyetlen tényező szerepel, és ahol az első sor $k_1$-edik, második sor $k_2$-edik, ..., $n$-edik sor $k_n$-edik elemének szorzata éppen annak a determinánsnak az előjelét kapja, amelyben az első sor $k_1$-edik, második sor $k_2$-edik, ..., $n$-edik sor $k_n$-edik eleme 1, az összes többi elem 0.

**5.21. Feladat.** Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcccrcl} x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & \cdots & + & a_nx_n & = & b \\ a_1^2x_1 & + & a_2^2x_2 & + & \cdots & + & a_n^2x_n & = & b^2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_1^{n-1}x_1 & + & a_2^{n-1}x_2 & + & \cdots & + & a_n^{n-1}x_n & = & b^{n-1} \end{array}$$

($a_1, a_2, \dots, a_n$ páronként különböző valós számok).

**5.22. Feladat.** Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcccrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & ax_n & = & 1 \end{array}$$

($a \in \mathbb{R}$ tetszőleges).

**5.23. Feladat.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ olyan mátrix, amelynek két sorvektora, mint térbeli vektor, nincs egy egyenesen. Mutassa meg, hogy az $Ax = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza $[v]$ alakú valamely $v \neq \underline{0}$ vektorra, és adjon is meg egy ilyen $v$-t — minél egyszerűbb formában — az $A$ mátrix elemeinek segítségével. (Csak az előadáson elhangzott ismeretek használhatók.)