4. feladatsor – Mátrixok

4.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

°(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{1\le i\le n} i$ minden n pozitív egészre;

°(b) $\sum_{1\ge i>n} 1 = 1$ minden n pozitív egészre;

(c) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i-j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(i-j)$ minden n pozitív egészre;

°(d) $\prod_{i,j=1}^{n} i = n!$ minden n pozitív egészre;

°(e) $\sum_{i,j=1}^{n} ij = 2\sum_{1\le i<j\le n} ij + \sum_{i=1}^{n} i^2$ minden n pozitív egészre;

°(f) $((cA)(cB))^{\mathrm{T}} = c^2\left(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\right)$ érvényes tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ skalár és $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén;

°(g) tetszőleges diagonális $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén az $A+B$ és az AB mátrix is diagonális;

(h) tetszőleges szimmetrikus $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén az $A+B$ és az AB mátrix is szimmetrikus;

(i) ha két felső trianguláris mátrix szorzata létezik, akkor az is felső trianguláris.

4.2. Feladat°. Egy üzemben háromféle müzlit gyártanak, csokoládésat, mogyorósat és kókuszosat, a következő alapanyagok felhasználásával: zabpehely, csokoládé, mogyoró és kókuszforgács. A csokoládés müzlihez 4 egység zabpehelyre, 3 egység csokoládéra és 1 egység mogyoróra van szükség. A mogyorós müzli 3 egység zabpelyhet, 2 egység csokoládét és 4 egység mogyorót tartalmaz, a kókuszos pedig 3 egység zabpelyhet, 1 egység csokoládét és 3 egység kókuszforgácsot.

(a) Határozza meg a termelési mátrixot.

(b) Adja meg, hogy mennyi alapanyag kell az egyes napokra, ha a következő megrendeléseket kapta az üzem egy adott héten a csokoládés (cs), mogyorós (m) és kókuszos (k) müzlire:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} cs & m & k \end{array} \\ \begin{array}{c} h \\ k \\ sz \\ cs \\ p \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(c) Mennyibe kerül az egyes müzlifajták előállítása, ha az alapanyagok egységnyi árai a következők: zabpehely 400 Ft, csokoládé 100 Ft, mogyoró 60 Ft, kókuszforgács 80 Ft?

4.3. Feladat°. Egy étteremben háromféle salátát árulnak, babsalátát, franciasalátát és tésztasalátát, a következő alapanyagokból előállítva: bab, majonéz, tejföl, borsó, répa, tészta. Egy adag babsalátához 5 egység babra, 3 egység majonézre és 1 egység tejfölre van szükség. A franciasalátához 4 egység majonézt, 2 egység tejfölt, 3 egység borsót és 4 egység répát használnak fel. A tésztasaláta elkészítéséhez pedig 1 egység bab, 5 egység majonéz, 2 egység tejföl, 1 egység borsó és 6 egység tészta kell.

(a) Határozza meg a termelési mátrixot.

(b) Mennyi alapanyagra van szükség egy napra, ha a tapasztalatok alapján reggelire, ebédre és vacsorára a következő mátrixnak megfelelő adag saláta szokott elfogyni:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} b & f & t \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ e \\ v \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 18 & 20 \\ 5 & 13 & 9 \end{pmatrix} \end{array}?$$

(c) Mennyibe kerül az egyes salátákból egy adag, ha az alapanyagok egységnyi ára: bab 100 Ft, majonéz 150 Ft, tejföl 50 Ft, borsó 60 Ft, répa 20 Ft, tészta 80 Ft?

4.4. Feladat°. Számítsa ki az

(a) $A+B,\ 3A,\ B^{\mathrm{T}},\ BC,\ AC,\ AC^{\mathrm{T}},\ D(B+C^{\mathrm{T}})$;

(b) $A+C^{\mathrm{T}},\ 3B,\ AD,\ B^{\mathrm{T}}D,\ (A^{\mathrm{T}}+C)D$;

(c) $C^{\mathrm{T}}+B,\ 4C,\ 3C-2B,\ A^{\mathrm{T}}D,\ D(C^{\mathrm{T}}+A)$;

(d) FG, GH, JG^{T}, K^2, $(F+G^{\mathrm{T}})I$;
(e) GF, IH, GK, $I^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}$, $FI+G^{\mathrm{T}}I$;
(f) $G+F^{\mathrm{T}}$, HG, HI, $J^{\mathrm{T}}F$, $(F+G)H$

mátrixokat a következő mátrixokra:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&-1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&0&1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\\0&-4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&2\\0&3\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&3\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&3\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}.$$

4.5. Feladat°. Elemezze az $(AB)^3 = A^3B^3$ egyenlőséget értelmezhetőség szempontjából, azaz előfordulhat-e, hogy

(a) a bal oldal létezik, de a jobb nem;
(b) a jobb oldal létezik, de a bal nem;
(c) mindkét oldal létezik, de különböző méretűek.

4.6. Feladat. Legyen $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$. Adja meg az összes olyan $B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ mátrixot, amely A-val felcserélhető, azaz amelyre $AB=BA$ teljesül.

4.7. Feladat°. Határozza meg a következő mátrixok inverzét:

(a) $\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&3\\-2&-2&11\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&4\\2&5&4\end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix}1&2&5&5\\-1&-1&-4&-6\\1&3&7&6\\-1&1&-3&-9\end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\2&-3&-1&-3\\-2&5&0&7\\-1&1&3&-3\end{pmatrix}$;

(g) $\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\1&1&0&0&-1\\0&1&-1&1&1\\-1&1&0&1&-1\\-1&-1&1&0&1\end{pmatrix}$; (h) $\begin{pmatrix}2&-10&-9&2&1\\0&5&6&4&0\\0&0&3&-2&2\\0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$; (i) $\begin{pmatrix}1&2&1&1&4\\-2&-3&0&-1&-7\\1&1&0&1&3\\-1&-1&-1&-1&-2\\-3&-4&0&-4&-11\end{pmatrix}$.

4.8. Feladat. Számítsa ki az alábbi $n\times n$-es mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

4.9. Feladat. Oldja meg a következő mátrixegyenleteket:

(a) $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&7\\-3&2&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}10&1\\29&5\\8&5\end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 7\\ -5 & 3\end{pmatrix}$;

(d) $X \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 2\\ -2 & -4 & 2 & 1\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 13\\ -5 & -3\end{pmatrix}$;

(f) $X \cdot \begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$;

(g) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 5 & 1\\ -2 & 0 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ -2 & 4 & -1\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

4.10. Feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, melyre $A^k = \underline{0}$. Igazolja, hogy ekkor $E - A$ nemelfajuló és $(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$. (Segítség: Vizsgálja meg először a $k = 2$ és $k = 3$ eseteket.)

Szorgalmi feladatok

4.11. Feladat. Döntse el, hogy teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges $n \times n$-es A, B mátrixok és k, m pozitív egészek esetén, és döntését indokolja:

(a) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
(b) $A^k A^m = A^{k+m}$;
(c) $(A^k)^m = A^{km}$;
(d) $(AB)^k = A^k B^k$.

4.12. Feladat. Egy $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot ferdén szimmetrikusnak nevezünk, ha $C^{\mathrm{T}} = -C$. Igazolja, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix felbontható $A = B + C$ alakban, ahol B szimmetrikus, C pedig ferdén szimmetrikus mátrix.

4.13. Feladat. Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix, és legyenek i, j olyan pozitív egészek, amelyekre $i \le n$, $j \le k$. Adjon meg olyan P, illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat az az 1×1-es mátrix, melynek egyetlen eleme az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme.

4.14. Feladat. Határozza meg a $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre, és minden további számolás nélkül adja meg a mátrix inverzét is.

4.15. Feladat. Határozza meg a $\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre, és minden további számolás nélkül adja meg a mátrix inverzét is.

4.16. Feladat. Határozza meg az $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre.

4.17. Feladat. Határozza meg az $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre, valamint a mátrix inverzét is.

4.18. Feladat. Határozza meg az összes olyan 2×2-es mátrixot, melynek négyzete a nullmátrix.

4.19. Feladat. Az $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *nyoma* (trace) a főátlóban lévő elemek összege: $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Igazolja, hogy bármely A mátrixra $\operatorname{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right) \geq 0$, és egyenlőség csak $A = \underline{0}$ esetén áll fenn.

4.20. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixokra

(a) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;

(b) $AB - BA \neq E$.

4.21. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges $Q, R, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixokra teljesül, hogy ha $RQ = E$, akkor $\operatorname{tr}(QAR) = \operatorname{tr}(A)$.

4.22. Feladat. Az exponenciális függvényre ismert a következő képlet:

$$\exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Itt $e \sim 2,718\,281$ a természetes logaritmus alapszáma, a végtelen összeget pedig elég intuitívan értelmezni. Számítsa ki az $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mátrixot.

4.23. Feladat. Határozza meg az $n \times n$-es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét ($n > 1$).

4.24. Feladat. Adjon szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy $n \times n$-es felső trianguláris mátrixnak mikor létezik inverze.

4.25. Feladat. Oldja meg az $AX^{-1}B - C = AX^{-1}$ mátrixegyenletet, ahol A, B, C az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.26. Feladat. Bizonyítsa be tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén a következőt: ha $AB + A + B = \underline{0}$, akkor $AB = BA$.