MBNK12: Relációk és műveletek

(előadásvázlat, 2016. április 26.)

Kátai-Urbán Kamilla, Maróti Miklós

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát, $\mathbb{R}^{m\times n}$ az $m\times n$-es valós mátrixok halmazát, és $\mathbb{Z}_m$ a modulo m maradékosztályok halmazát.

1. Osztályozás és ekvivalenciareláció

1. Definíció. Tetszőleges A halmazra $\mathcal{P}(A)$ egy $\mathcal{C}$ részhalmazát az A osztályozásának vagy partíciójának nevezzük, ha a $\mathcal{C}$-beli halmazok

(1) nem üresek,
(2) egyesítésük A, és
(3) páronként diszjunktak.

A $\mathcal{C}$-beli halmazokat osztályoknak vagy blokkoknak nevezzük.

2. Példa. Legyen $A = \{1,2,3\}$ és keressük meg A összes osztályozását (partícióját). A definíció szerint A éppen a $\mathcal{C}$-beli halmazok diszjunkt uniója. A 3-elemű halmazt fel lehet bontani három egyelemű osztályra ($3 = 1+1+1$), vagy egy kételemű és egy egyelemű osztályra ($3 = 2+1$), vagy egyetlen 3-elemű osztályra ($3 = 3$). Minden esetben meg kell vizsgálni, hogy hány ilyen felbontás lehetséges, és azt kapjuk, hogy összesen 5 osztályozása van A-nak:

(1) $\mathcal{C} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$,
(2) $\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{3\}\}$,
(3) $\mathcal{C} = \{\{1\},\{2,3\}\}$,
(4) $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{2\}\}$, vagy
(5) $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\}\}$.

3. Példa. A modulo m maradékosztályok definíciójában azt mondtuk, hogy

$$\overline{a} = \{\, b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \pmod{m}\,\},$$

és a maradékosztályok halmaza $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$. Vegyük észre, hogy minden $\overline{a}$ maradékosztály részhalmaza $\mathbb{Z}$-nek, és ezek diszjunkt uniója éppen $\mathbb{Z}$. Tehát $\mathbb{Z}_m$ az egész számok egy osztályozása.

4. Példa. Vegyük azt az osztályozását $\mathbb{Z}$-nek, melyben az azonos abszolutértékű számok kerülnek egy osztályba. Ekkor a $\mathcal{C} = \{\{0\},\{1,-1\},\{2,-2\},\dots\}$ osztályozását kapjuk, melynek csak egyetlen egy egyelemű osztálya van, minden más osztálya kételemű.

5. Definíció. Legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ osztályozása az A halmaznak. Ekkor az $a \in A$ elem osztályán azt a $B \in \mathcal{C}$ osztályt értjük, amelyre $a \in B$, és ezt az osztályt $\overline{a}$-val jelöljük.

6. Példa. A 2. példa $\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{3\}\}$ osztályozására $\overline{1} = \{1,2\}$, $\overline{2} = \{1,2\}$ és $\overline{3} = \{3\}$. A 3. példában megadott $\overline{a}$ éppen az a elem osztálya, azaz az előző definícióban megadott jelölés ugyan azt adja mint ahogy a maradékosztályokat definiáltuk. A 4. példában $\overline{0} = \{0\}$ és $\overline{1} = \{-1,1\}$.

7. Definíció. Tetszőleges A halmazra az $A\times A$ halmaz részhalmazait relációknak nevezzük. A $\varrho \subseteq A\times A$ reláció

(1) reflexív, ha minden $a \in A$ elemre $(a,a) \in \varrho$;
(2) szimmetrikus, ha tetszőleges $(a,b) \in \varrho$ elempárra $(b,a) \in \varrho$; és
(3) tranzitív, ha tetszőleges $(a,b),(b,c) \in \varrho$ elempárokra $(a,c) \in \varrho$.

A relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

8. Példa. Az $A = \{1,2,3\}$ halmazon tekintsük a $\varrho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\} \subseteq A\times A$ relációt. Ez reflexív, mert $(1,1)$, $(2,2)$ és $(3,3)$ is eleme ϱ-nak. Szimmetrikus is, mert például az $(1,2) \in \varrho$ elempárt tekinte látjuk, hogy $(2,1)$ is eleme ϱ-nak; vagy ha az $(1,1) \in \varrho$ elempárt tekintjük, akkor a $(1,1) \in \varrho$. Hasonlóan látható, hogy ϱ tranzitív is, ezért ϱ ekvivalenciareláció.

9. Példa. Az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ reláció nem reflexív, mert $(1,1) \notin \varrho$. A reláció szimmetrikus, viszont nem tranzitív, mert $(1,2),(2,1) \in \varrho$ de $(1,1) \notin \varrho$.

10. Tétel. Tetszőleges $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ osztályozásra a

$$\varrho = \{\, (a,b) \in A \times A : \overline{a} = \overline{b} \,\}$$

reláció ekvivalenciareláció.

11. Példa. A 4. példában megadott osztályozáshoz a

$$\begin{aligned}\varrho = \{(0,0),(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1),(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2),\dots\,\} \\ = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| = |b|\,\}\end{aligned}$$

ekvivalenciareláció tartozik.

12. Definíció. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció. Az $a \in A$ elem osztálya alatt az

$$\overline{a} = \{\, b \in A : (a,b) \in \varrho \,\}$$

halmazt értjük. Definiáljuk a $A/\varrho = \{\overline{a} \in \mathcal{P}(A) : a \in A\,\}$ halmazt, melyet a ϱ ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozásnak vagy az A halmaz ϱ szerinti faktorhalmazának nevezünk.

13. Példa. Tekintsük az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ ekvivalenciarelációt. Ekkor $\overline{1} = \{\, b \in A : (1,b) \in \varrho \,\} = \{1,2\}$. Hasonlóan $\overline{2} = \{1,2\}$ és $\overline{3} = \{3\}$. Tehát definiíció szerint

$$A/\varrho = \{\overline{1},\overline{2},\overline{3}\} = \{\{1,2\},\{1,2\},\{3\}\} = \{\{1,2\},\{3\}\},$$

ami osztályozása A-nak.

14. Tétel. Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációra A/ϱ osztályozása A-nak.

15. Tétel. Legyen $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, ϱ a 10. tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció, és $\mathcal{C}' = A/\varrho$ a 14. tétel szerint származtatott osztályozás. Ekkor $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, azaz visszakaptuk az eredeti osztályozást.

16. Tétel. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció, $\mathcal{C} = A/\varrho$ a 14. tétel szerint származtatott osztályozás, és ϱ' a 10. tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció. Ekkor $\varrho = \varrho'$, azaz visszakaptuk az eredeti ekvivalenciarelációt.

17. Következmény. Rögzített A halmazon az osztályozások és ekvivalenciarelációk kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak, azaz ugyan annyian vannak.

18. Definíció. Tetszőleges A halmazon a $\Delta_A = \{\,(a,b) \in A \times A : a = b\,\}$ ekvivalenciarelációt egyenlőségrelációnak, a $\nabla_A = A \times A$ ekvivalenciarelációt teljes relációnak nevezzük.

19. Definíció. A $\varphi\colon A \to B$ leképezés magja a

$$\ker\varphi = \{\,(a,b) \in A \times A : a\varphi = b\varphi\,\}$$

reláció az A halmazon.

20. Tétel. Tetszőleges $\varphi\colon A \to B$ leképezésre $\ker\varphi$ ekvivalenciareláció az A halmazon. φ akkor és csak akkor injektív, ha $\ker\varphi = \Delta_A$.

2. Részbenrendezés és Hasse-diagram

21. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció

(1) antiszimmetrikus, ha bármely $a,b \in A$ elemre ha $(a,b),(b,a) \in \varrho$, akkor $a = b$;
(2) dichotóm, ha bármely $a,b \in A$ elemre $(a,b) \in \varrho$ vagy $(b,a) \in \varrho$.

A ϱ reláció részbenrendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. A ϱ reláció (lineáris) rendezés, ha részbenrendezés és dichotóm.

22. Példa. Az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$ reláció részbenrendezés, de nem rendezés, mert $(2,3),(3,2) \notin \varrho$.

23. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ekvivalenciareláció nem részbenrendezés, mert $(1, 2), (2, 1) \in \varrho$ és $1 \neq 2$.

24. Példa. A nemnegatív egészek $\mathbb{N}_0$ halmazán az oszthatóság reláció részbenrendezés, de nem rendezés. Az egészek halmazán az oszthatóság reláció nem részbenrendezés, mert nem dichotóm: $1 \mid -1$ és $-1 \mid 1$.

25. Példa. Tetszőleges A halmazra a $\mathcal{P}(A)$ hatványhalmazon a $\subseteq$ részhalmaz reláció részbenrendezés. $\mathcal{P}(A)$ tetszőleges részhalmaza a tartalmaz-sra nézve részbenrendezés.

26. Példa. Legyen A rögzített halmaz, és tekintsük az összes ekvivalenciareláció halmazát A-n:

$$\mathrm{Equ}(A) = \{\, \varrho \subseteq A \times A : \varrho \text{ ekvivalenciareláció} \,\}.$$

Ekkor $\mathrm{Equ}(A)$-n a részhalmaz reláció részbenrendezés.

27. Definíció. Legyen ϱ részbenrendezés az A halmazon. Ha ez nem vezet félreértésre, akkor $(a, b) \in \varrho$ helyett $a \leq b$-t írunk, és a $a < b$ jelölést használjuk arra, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. Az $m \in A$ elem maximális, ha nincs olyan $a \in A$ hogy $m < a$. Duális módon definiáljuk a minimális elemet.

28. Példa. Egy részbenrendezésnek lehet több maximális és minimális elem is, és az is előfordulhat hogy nincs maximális vagy minimális elem. Például az $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \}$ halmazon az oszthatóság részbenrendezés, amelynek nincsen maximális eleme, de végtelen sok minimális eleme van, melyek éppen a prímszámok.

29. Tétel. Véges halmazon minden részbenrendezésnek van maximális és minimális eleme.

30. Definíció. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A halmazon. Az $m \in A$ elemet legnagyobb elemnek nevezzük, ha minden $a \in A$ elemre $a \leq m$. Duális módon definiáljuk a legkisebb elemet.

31. Tétel. Egy részbenrendezésnek legfeljebb egy legnagyobb és egy legkisebb eleme lehet.

32. Definíció. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A halmazon. Azt mondjuk, hogy a $b \in A$ elem fedi az $a \in A$ elemet, és ezt $a \prec b$-vel jelöljök, ha $a < b$ és nincs olyan $c \in A$ hogy $a < c < b$.

33. Megjegyzés. A részbenrendezéseket úgy szemléltethetjük, hogy az elemek közt csak a fedési relációt rajzoljuk be mégpedig úgy, hogy ha $a \prec b$, akkor a-t lejebb rajzoljuk, mint b-t. Ekkor a $d \leq e$ relációt úgy olvashatjuk le a diagramról, hogy van egy felfelé vezető út d-ből e-be néhány közbülső $c_1, \dots, c_n$ elemen keresztül, azaz $d \prec c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_n \prec e$. Ezt a diagramot a részbenrendezés Hasse-diagramjának nevezzük.

34. Példa. Vegyük a 12 pozitív osztóinak halmazát az oszthatóság részbenrendezéssel. Ekkor összesen 7 fedő pár van:

$$1 \prec 2, \quad 1 \prec 3, \quad 2 \prec 4, \quad 2 \prec 6, \quad 3 \prec 6, \quad 4 \prec 12, \quad 6 \prec 12,$$

azaz a Hasse-diagram 6 pontból és 7 élből áll.

35. Példa. A racionális számok halmazán a szokásos $\leq$ rendezésben nincsen fedő pár.

36. Tétel. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A véges halmazon. Ekkor a részbenrendezést a fedési reláció (azaz a Hasse-diagram) egyértelműen meghatározza.

37. Tétel. Ha ϱ és σ tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus) relációk az A halmazon, akkor $\varrho \cap \sigma$ is tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus).

38. Tétel. A $\varrho \subseteq A \times A$ akkor és csak akkor tranzitív, ha $\varrho\varrho \subseteq \varrho$ ahol a szorzás a megfeleltetés szorzás.

39. Definíció. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. A ϱ tranzitív lezártja alatt azt a legszűkebb $\hat{\varrho}$ tranzitív relációt értjük, amelyre $\varrho \subseteq \hat{\varrho}$.

40. Tétel. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. Ekkor

(1) $\hat{\varrho} = \bigcap \{\, \sigma : \varrho \subseteq \sigma \text{ és } \sigma\sigma \subseteq \sigma \,\}$
(2) $\hat{\varrho} = \varrho \cup \varrho\varrho \cup \varrho\varrho\varrho \cup \cdots = \bigcup \{\, \varrho^n : n \in \mathbb{N} \,\}$,

(3) $\hat{\varrho} = \{\, (a,b) \in A \times A : (\exists n \in \mathbb{N}_0)(\exists c_1, \ldots, c_n \in A)$ hogy $(a,c_1),(c_1,c_2),\ldots,(c_n,b) \in \varrho \,\}$,

41. Példa. Ha $A = \{1,2,3\}$ és $\varrho = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$, akkor $\varrho\varrho = \{(1,1),(1,3),(2,2)\}$. Tehát $\varrho \cup \varrho\varrho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$ már tranzitív és ez lesz a tranzitív lezárt.

42. Definíció. Azt mondjuk, hogy az a és b elemek összehasonlíthatók a $\leq$ részbenrendezésben, ha $a \leq b$ vagy $b \leq a$.

43. Példa. A 12 pozitív osztóinak halmazán az oszthatóság részbenrendezésben 2 és 3 nem összehasonlítható, míg 2 és 6 igen.

3. Műveleti tulajdonságok

44. Jelölés. Legyen A egy tetszőleges halmaz, jelölje A^n az n-tényezős $A \times A \times \cdots \times A$ Descartes-szorzatot.

45. Definíció. Legyen A tetszőleges nemüres halmaz, és $n \in \mathbb{N}_0$. Az A-n értelmezett n-változós műveleten egy $A^n \to A$ leképezést értünk, n-et a művelet változószámának (aritásának) nevezzük.

46. Megjegyzés. Az előző definíció $n = 0$ esetén egy elem kijelölését jelenti az A halmazból.

47. Definíció. Legyen A tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{F}$ pedig jelölje az A-n értelmezett műveletek egy halmazát, ekkor az $(A;\mathcal{F})$ párt algebrának nevezzük.

48. Példa. Ha az előző definícióban szereplő $\mathcal{F}$ véges halmaz, akkor elemeit felsoroljuk a halmaz jelet elhagyva, például algebrák a következők: $(\mathbb{Z};+,\cdot)$, $(\mathbb{Z};-)$, $(\mathbb{N};1,\cdot)$, $(\mathbb{R}^3;+)$, $(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$, $(\mathbb{Z};\min,\max)$, $(\mathbb{N};\mathrm{lnko},\mathrm{lkkt})$, $(\mathbb{Z}_{12};+,\cdot)$, $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\neg,\wedge,\vee,\to)$, $(\mathcal{P}(U);\emptyset,\bar{\ },\cap,\cup,\triangle)$, $(S_n;\cdot)$, $(S_n;\mathrm{id},\cdot)$.

49. Definíció. Azokat az algebrákat, amelyeknek egy kétváltozós művelete van grupoidnak nevezzük.

50. Példa. A 48. példában megadott algebrák közül a következők grupoidok: $(\mathbb{Z};-)$, $(\mathbb{R}^2;+)$, $(S_n;\cdot)$.

51. Definíció. (Grupoid műveleti tulajdonságai)

(1) Az $(A;\circ)$ grupoid idempotens, ha $(\forall a \in A)(a \circ a = a)$.
(2) Az $(A;\circ)$ grupoid asszociatív, ha $(\forall a,b,c \in A)\big(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c\big)$.
(3) Az $(A;\circ)$ grupoid kommutatív, ha $(\forall a,b \in A)(a \circ b = b \circ a)$.
(4) Az $(A;\circ)$ grupoidban van zéruselem, ha $(\exists o \in A)(\forall a \in A)(a \circ o = o \circ a = o)$.
(5) Az $(A;\circ)$ grupoidban van egységelem, ha $(\exists e \in A)(\forall a \in A)(a \circ e = e \circ a = a)$.
(6) Ha az $(A;\circ)$ grupoidban e egységelem, és $(\forall a \in A)(\exists b \in A)(a \circ b = b \circ a = e)$, akkor minden elemnek van inverze.

52. Tétel. Bármely grupoidban legfeljebb egy egységelem és legfeljebb egy zéruselem van.

53. Definíció. Ha a grupoidnak van egységeleme, egységelemes, ha van zéruseleme, zéruselemes grupoidnak nevezzük.

54. Példa. Olyan grupoidokra adunk példát, melyek a 51. definícióban szereplő tulajdonságokkal rendelkeznek.

(1) Idempotens grupoidok: $(\mathbb{Z};\min), (\mathbb{N};\mathrm{lkkt}), (\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee), (\mathcal{P}(U);\cap)$.
(2) Asszociatív grupoidok: $(\mathbb{N};\cdot), (\mathbb{R}^3;+), (\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot), (\mathbb{N};\mathrm{lnko}), (\mathbb{Z};\max), (\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge), (\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow), (\mathcal{P}(U);\cup), (\mathcal{P}(U);\triangle), (A^A;\cdot), (S_n;\cdot)$.
(3) Kommutatív grupoidok: $(\mathbb{N};\cdot), (\mathbb{R}^3;+), (\mathbb{N};\mathrm{lnko}), (\mathbb{Z};\max), (\mathbb{Z}_4;+), (\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge), (\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow), (\mathcal{P}(U);\cup), (\mathcal{P}(U);\triangle)$.
(4) Zéruselemes grupoidok: $(\mathbb{Z};\cdot)$ zéruseleme a 0, $(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$ zéruselme a 2×2-es zérómátrix, $(\mathbb{N};\mathrm{lnko})$ zéruselme az 1, $(\mathbb{Z}_4;\cdot)$ zéruseleme a $\overline{0}$, $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$ zéruseleme a $\mathbf{h}$, $(\mathcal{P}(U);\cup)$ zéruselme az U.

grupoid	zéruselem
$(\mathbb{Z};\cdot)$	0
$(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$	$\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$
$(\mathbb{N};\text{lnko})$	1
$(\mathbb{Z}_3;\cdot)$	$\overline{0}$
$\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$	$\mathbf{h}$
$\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee)$	$\mathbf{i}$
$(\mathcal{P}(U);\cap)$	$\emptyset$
$(\mathcal{P}(U);\cup)$	U

(5) Egységelemes grupoidok: $(\mathbb{Z};\cdot)$ egységeleme az 1, $(\mathbb{Z};+)$ egységeleme a 0, $(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$ egységelme a 2×2-es egységmátrix, $(\mathbb{Z}_4;\cdot)$ egységeleme az $\overline{1}$, $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$ egységeleme az $\mathbf{i}$, $(\mathcal{P}(U);\cup)$ egységelme az $\emptyset$, $(\mathcal{P}(U);\triangle)$ egységeleme az $\emptyset$, $(S_n;\cdot)$ egységeleme az id.

grupoid	egységelem
$(\mathbb{Z};\cdot)$	1
$(\mathbb{Z};+)$	0
$(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
$(\mathbb{Z}_3;\cdot)$	$\overline{1}$
$(\mathbb{Z}_4;+)$	$\overline{0}$
$(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$	$\mathbf{i}$
$(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$	$\mathbf{i}$
$(\mathcal{P}(U);\cup)$	$\emptyset$
$(\mathcal{P}(U);\triangle)$	$\emptyset$
A^A	id_A
$(S_n;\cdot)$	id

(6) Egységelmeles grupoidok, ahol minden elemnek van inverze: $(\mathbb{Z};+)$-ban az a inverze $-a$, $(\mathbb{R}^3;+)$-ban a v inverze $-v$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\};\cdot)$-ban a inverze $1/a$, $(\mathbb{Z}_4;+)$-ban a $\overline{0}$ és a $\overline{2}$ inverze önmaga, a $\overline{3}$ és $\overline{1}$ egymás inverzei, $(\mathbb{Z}_3\setminus\{\overline{0}\};\cdot)$-ban minden elem inverze önmaga, $(\mathcal{P}(U);\triangle)$-ban minden elem inverze önmaga, $(S_n;\cdot)$-ben π inverze π^{-1}.

grupoid	a inverze
$(\mathbb{Z};+)$	$-a$
$(\mathbb{R}^3;+)$	$-a$
$(\mathbb{Q}\setminus\{0\};\cdot)$	$\frac{1}{a}$
$(\mathbb{Z}_3\setminus\{\overline{0}\};\cdot)$	a
$(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$	a
$(\mathcal{P}(U);\triangle)$	a
$(S_n;\cdot)$	a^{-1}

55. Példa. Olyan grupoidokra adunk példát, melyek NEM rendelkeznek a 51. definícióban szereplő tulajdonságokkal.

(1) Nem idempotens grupoidok: $(\mathbb{Z};+),(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q};\cdot),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\mathbb{Z}_4;+),$ $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(\mathcal{P}(U);\triangle),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.
(2) Nem asszociatív grupoidok: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus)$.
(3) Nem kommutatív grupoidok: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.
(4) Grupoidok, ahol nincs zéruselem: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Z};+),(\mathbb{N};\cdot),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{Z}_4;+),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),$ $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(\mathcal{P}(U);\triangle),(S_n;\cdot)$.
(5) Grupoidok, ahol nincs egységelem: $(\mathbb{N};+),(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus)$.
(6) Egységelemes grupoidok, ahol nincs minden elemnek inverze: $(\mathbb{N}_0;+),(\mathbb{Z};\cdot),(\mathbb{Q};\cdot),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),$ $(\mathbb{Z}_3;\cdot),(\mathbb{Z}_4;\cdot),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee),(\mathcal{P}(U);\cap),(\mathcal{P}(U);\cup),(A^A;\cdot)$.

56. Definíció. Legyen $\circ$ és $\star$ két kétváltozó művelet az A halmazon.

(1) A $\circ$ disztributív a $\star$-ra nézve, ha $(\forall a,b,c\in A)((a\circ(b\star c)=(a\circ b)\star(a\circ c))\wedge((b\star c)\circ a=(b\circ a)\star(c\circ a)))$.
(2) A $\circ$ abszorptív a $\star$-ra nézve, ha $(\forall a,b\in A)\big((a\circ(a\star b)=a)\wedge((a\star b)\circ a=a)\big)$.

57. Példa. Az előző definícióban szereplő fogalmakra adunk példát.

(1) Az $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ halmazon a $\cdot$ disztributív a $+$-ra. Az $\mathbb{N}$ halmazon a lnko disztributív a lkkt-re, és a lkkt is disztributív a lnko-ra. Az $\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ halmazon a $\wedge$ disztributív a $\vee$-ra, és fordítva, a $\vee$ is disztributív a $\wedge$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon a $\cap$ disztributív a $\cup$-ra, és fordítva, az $\cup$ is disztributív a $\cap$-ra, továbbá a $\cap$ disztributív a $\triangle$-ra.

(2) Az $\mathbb{N}$ halmazon a lnko abszorptív a lkkt-re, és a lkkt is abszorptív a lnko-ra. Az $\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ halmazon a $\wedge$ abszorptív a $\vee$-ra, és fordítva, a $\vee$ is abszorptív a $\wedge$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon a $\cap$ abszorptív a $\cup$-ra, és fordítva, az $\cup$ is abszorptív a $\cap$-ra.