

MBNK12: Halmazok, leképezések

(előadásvázlat, 2016. április 10.)

Maróti Miklós

Jelölje \mathbb{Z} az egész számok halmazát, \mathbb{N} a pozitív egészek halmazát, \mathbb{Q} a racionális számok halmazát, \mathbb{R} a valós számok halmazát, és \mathbb{R}_0^+ a nem negatív valós számok halmazát.

1. HALMAZOK

1. Megjegyzés. A **halmaz** és a halmaz **elemé** alapfogalmak, nem definiáljuk. Az $a \in A$ jelölést használjuk annak kifejezésére, hogy a eleme A -nak. A $\neg(a \in A)$ formula helyett $a \notin A$ -t írunk. Megjegyezzük, hogy egy elem nem lehet többször eleme egy halmaznak, azaz csak az számít, hogy az adott elem eleme-e a halmaznak vagy sem. A halmazelmélet axiomatikus felépítésében csak azt tesszük fel, hogy \in kétváltozós predikátumjel, és az individuumtartományunk a halmazok összessége.

2. Definíció. Ha az A és B halmazoknak ugyan azok az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy **egyenlők**, és azt írjuk, hogy $A = B$. Ha A minden eleme B -nek is eleme, azaz $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy A **részhalmaza** B -nek, és azt írjuk hogy $A \subseteq B$. Az A halmaz **valódi részhalmaza** B -nek, amelyet $A \subset B$ -vel jelölünk, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

3. Definíció. Azt a halmazt, melynek nincsen eleme, **üreshalmaznak** nevezzük és \emptyset -el jelöljük, azaz $\neg(\exists x)(x \in \emptyset)$ teljesül.

4. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

- (1) $A \subseteq A$ és $\emptyset \subseteq A$;
- (2) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$;
- (3) $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

5. Definíció. Legyenek a_1, \dots, a_n nem feltétlen különböző elemek. Ekkor $\{a_1, \dots, a_n\}$ azt az A halmazt jelöli, amelynek pontosan a_1, \dots, a_n az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow (x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n))$.

6. Példa. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{1, 2\}; \quad B = \{1, 3 - 1\}; \quad C = \{1, 1, 2\}; \quad D = \{\emptyset, 1, 2\}; \quad E = \{\{1\}, 2\}; \quad F = \{\{1, 2\}\}.$$

Ekkor $A = B = C$, a többi mind különböző. D -nek három, F -nek egy eleme van, a többinek kettő. $\{1\}$ részhalmaza A, B, C és D -nek, de E és F -nek nem. $\{1\}$ csak E -nek eleme, a többinek nem.

7. Definíció. Legyen F olyan formula, melynek csak x a szabad változója. Ekkor $\{x : F\}$ azt az A halmazt jelöli, amelyre $(\forall x)(F \leftrightarrow x \in A)$ teljesül. Ha nem világos, hogy x milyen U individuumtartomány eleme lehet, akkor az $\{x \in U : F\}$ jelölést használjuk. Formula helyett sokszor csak szöveges predikátumot írunk amelyet megfelelően lehetne formalizálni.

8. Példa. A következő halmazok mind egyenlők: $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{x \in \mathbb{N} : x \mid 6\}$, $\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 1 \text{ és } x \mid 6\}$, $\{\text{hat pozitív osztói}\}$.

9. Definíció. Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk az **egyesítésüket** és **metszetüket**:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Azt mondjuk, hogy A és B **diszjunktak**, ha $A \cap B = \emptyset$.

10. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

$$\begin{array}{lll}
 A \cup \emptyset = A, & A \cap \emptyset = \emptyset, & \\
 A \cup A = A, & A \cap A = A, & \text{(idempotencia)} \\
 A \cup B = B \cup A, & A \cap B = B \cap A, & \text{(kommutativitás)} \\
 (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), & \text{(asszociativitás)} \\
 (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \text{(abszorptivitás)} \\
 (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). & \text{(disztibutivitás)}
 \end{array}$$

11. Definíció. Legyen rögzítve egy U univerzum. Ekkor tetszőleges $A \subseteq U$ halmazra definiáljuk az A **komplementerét**:

$$\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}.$$

12. Tétel. Tetszőleges $A, B \subseteq U$ halmazokra

$$\begin{array}{lll}
 \bar{\bar{A}} = A, & & \text{(dupla tagadás)} \\
 \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, & \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, & \text{(De Morgan szabályok)} \\
 A \cap \bar{A} = \emptyset, & A \cup \bar{A} = U, & \\
 A \cap U = A, & A \cup \emptyset = A. &
 \end{array}$$

13. Definíció. Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a **különbségüket** és **szimmetrikus különbségüket**:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}, \quad A \triangle B = \{x : x \in A \leftrightarrow x \notin B\}.$$

14. Tétel. Tetszőleges $A, B \subseteq U$ halmazokra $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ és $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

15. Definíció. Tetszőleges a, b elemekre definiáljuk az (a, b) **rendezett elempárt**. Az (a, b) rendezett elempárnak a és b az **első**, illetve a **második koordinátája**. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlők.

16. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra definiáljuk a **Descartes-szorzatukat**:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

17. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ hatelemű halmaz. Vegyük észre, hogy $\emptyset \times B = \emptyset$, mert ha (a, b) eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor $a \in \emptyset$ lenne, ami nem lehet.

18. Definíció. Tetszőleges A halmaz esetén az A összes részhalmazainak halmazát az A **hatványhalmazának** nevezzük és $\mathcal{P}(A)$ -val jelöljük, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

19. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ háromelemű halmaz hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

8-elemű. Az üreshalmaznak csak az üreshalmaz a részhalmaza, ezért $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, azaz egy olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üreshalmaz. Gondoljuk át, hogy $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. MEGFELELTETÉSEK ÉS LEKÉPEZÉSEK

20. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra az $A \times B$ halmaz részhalmazait A -ból B -be menő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Az A halmazt a megfeleltetés **indulási halmazának**, B -t pedig az **érkezési halmazának** nevezzük.

21. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ halmazból a $B = \{3, 4, 5\}$ halmazba menő megfeleltetések pontosan a $\mathcal{P}(A \times B)$ elemei, azaz $2^6 = 32$ van belőlük. Például az \emptyset is megfeleltetés A -ból B -be, ebből látható, hogy a megfeleltetés megadásakor mindig meg kell adni az érkezési és indulási halmazokat is.

22. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés **értelmezési tartománya** az $\{a \in A : (\exists b \in B)((a, b) \in \varrho)\}$, **értékkészlete** pedig a $\{b \in B : (\exists a \in A)((a, b) \in \varrho)\}$ halmazok.

23. Példa. Vegyük a $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ megfeleltetést a valós számokon. Ekkor ϱ értelmezési tartománya \mathbb{R}_0^+ , az értékkészlete pedig \mathbb{R} .

24. Jelölés. A megfeleltetéseket négyféleképpen ábrázolhatjuk: 1) koordináta-rendszerben berajzoljuk azokat a pontokat, melyek meg vannak feleltetve egymásnak, 2) felrajzolhatjuk az indulási és érkezői halmazokat az elemeikkel, és a megfeleltetett elemeket nyíllal összekötjük, 3) ha az érkezői és indulási halmazok megegyeznek, akkor egy irányított gráf élével jelöljük a megfeleltetett elemeket, 4) egy $0,1$ mátrixszal, melynek sorai az indulási, oszlopai pedig az érkezői halmaz elemeit jelöli.

25. Definíció. Minden $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetésre definiáljuk az **inverzét**:

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in \varrho\}.$$

26. Definíció. Ha a $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés érkezői halmaza megegyezik a $\sigma \subseteq B \times C$ megfeleltetés indulási halmazával, akkor definiáljuk a $\varrho\sigma \subseteq A \times C$ **szorzatukat**:

$$\varrho\sigma = \{(a, c) \in A \times C : (\exists b \in B)((a, b) \in \varrho \wedge (b, c) \in \sigma)\}.$$

27. Példa. Vegyünk emberek egy E halmazát és rajtuk a $\sigma = \{(x, y) \in E \times E : x \text{ szülője } y\text{-nak}\}$ megfeleltetést. Ekkor $\sigma\sigma$ a „nagyszülő”, $\sigma^{-1}\sigma$ pedig a „testvér vagy féltestvér” megfeleltetést adja.

28. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés **parciális leképezés**, ha minden $a \in A$ elemre legfeljebb egy olyan $b \in B$ elem létezik, hogy $(a, b) \in \varrho$. Ilyenkor a $\varrho: A \rightarrow B$ jelölés használjuk, ami azt jelenti, hogy ϱ parciális leképezés A -ból B -be. Továbbá $(a, b) \in \varrho$ helyett azt mondjuk hogy az a **elem** ϱ melletti **képe** b , és azt írjuk, hogy $a\varrho = b$ vagy $\varrho(a) = b$. A parciális leképezést **leképezésnek** nevezzük, ha minden $a \in A$ elemre pontosan egy vele megfeleltetett $b \in B$ elem létezik.

29. Példa. A 23. példában megadott megfeleltetés nem parciális leképezés, mivel mind $(4, 2)$, mind $(4, -2)$ is eleme ϱ -nak. Viszont a $\varrho \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ megfeleltetés \mathbb{R} -ből \mathbb{R}_0^+ -ba már parciális leképezés de még mindig nem leképezés, mivel a -1 elemnek nincsen képe. A $\varrho \cap (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ megfeleltetés viszont már leképezés.

30. Példa. Minden leképezés elempárok halmaza. Vegyük például az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon az abszolútérték függvényt. Ekkor ez leképezés amely egyenlő a $\{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ halmazzal.

31. Tétel. Ha $\varrho: A \rightarrow B$ és $\sigma: B \rightarrow C$ leképezések, akkor $\varrho\sigma: A \rightarrow C$ is leképezés és tetszőleges $a \in A$ elemre $a(\varrho\sigma) = (a\varrho)\sigma$.

32. Definíció. Tetszőleges A halmazon definiáljuk az **identikus leképezést**:

$$\text{id}_A = \{(a, b) \in A \times A : a = b\}.$$

33. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$ leképezésre $\text{id}_A \varrho = \varrho$ és $\varrho \text{id}_B = \varrho$.

34. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$, $\sigma: B \rightarrow C$ és $\tau: C \rightarrow D$ leképezésekre $(\varrho\sigma)\tau = \varrho(\sigma\tau)$, azaz a szorzás asszociatív.

35. Példa. Vegyük az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ és $\sigma = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ leképezéseket. Ekkor $\varrho\sigma = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ és $\sigma\varrho = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, azaz a szorzás nem kommutatív.

36. Definíció. A $\varrho: A \rightarrow B$ leképezés **szürjektív** (vagy **ráképezés**), ha minden elem előfordul képelemként, azaz ha

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varrho = b).$$

A $\varrho: A \rightarrow B$ leképezés **injektív** (vagy **kölcsönösen egyértelmű**), ha különböző elemek képe különböző, azaz ha

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varrho = a_2\varrho \rightarrow a_1 = a_2).$$

A ϱ leképezés **bijektív** (vagy **kölcsönösen egyértelmű ráképezés**), ha szürjektív és injektív is.

37. Tétel. A $\varrho: A \rightarrow B$ leképezésnek az inverze akkor és csak akkor leképezés, ha ϱ bijektív.

38. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$ és $\sigma: B \rightarrow C$ leképezésekre

- (1) ha ϱ és σ szürjektív, akkor $\varrho\sigma$ is szürjektív;
- (2) ha ϱ és σ injektív, akkor $\varrho\sigma$ is injektív;
- (3) ha ϱ és σ bijektív, akkor $\varrho\sigma$ is bijektív;
- (4) ha $\varrho\sigma$ szürjektív, akkor σ szürjektív;
- (5) ha $\varrho\sigma$ injektív, akkor ϱ injektív; és
- (6) ha $\varrho\sigma$ bijektív, akkor ϱ injektív és σ szürjektív.

39. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$, $\sigma: B \rightarrow C$ bijektív leképezésre

- (1) ϱ^{-1} is bijektív,
- (2) $\varrho\varrho^{-1} = \text{id}_A$,
- (3) $\varrho^{-1}\varrho = \text{id}_B$,
- (4) $(\varrho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\varrho^{-1}$.

40. Definíció. Az A halmazból B -be menő összes leképezés halmazát B^A -val jelöljük. Az A -ból A -ba menő összes bijektív leképezés halmazát $\text{Sym}(A)$ -vel jelöljük.

3. HALMAZOK ELEMSZÁMA

41. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok **elemszáma megegyezik**, és azt írjuk, hogy $|A| = |B|$, ha létezik bijektív leképezés A -ból B -re. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **n -elemű**, és azt írjuk, hogy $|A| = n$, ha n nemnegatív egész és létezik A -ból bijektív leképezés az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazra.

42. Példa. Az \emptyset halmaz nulla elemű. Az $\{\emptyset\}$ halmaz egyelemű, mert $\{(\emptyset, 1)\}$ bijektív leképezés $\{\emptyset\}$ -ből $\{1\}$ -be.

43. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

- (1) $|A| = |A|$;
- (2) ha $|A| = |B|$, akkor $|B| = |A|$;
- (3) ha $|A| = |B|$ és $|B| = |C|$, akkor $|A| = |C|$;
- (4) ha $|A| = |B|$, akkor $|A \times C| = |B \times C|$;
- (5) ha $|A| = |B|$, akkor $|A^C| = |B^C|$;
- (6) ha $|A| = |B|$, akkor $|C^A| = |C^B|$.

44. Tétel. Ha $|A| = n$, $|B| = m$ és az A és B halmazok diszjunktak, akkor $|A \cup B| = n + m$.

45. Tétel. Tetszőleges A halmazra $|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A|$. Ha $|A| = n$, akkor $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

46. Tétel. Ha $|A| = n$ és $0 \leq k \leq n$, akkor $|\{B \in \mathcal{P}(A) : |B| = k\}| = \binom{n}{k}$.

47. Tétel. Tetszőleges A, B halmazokra $|A \times B| = |B \times A|$. Ha $|A| = n$ és $|B| = m$, akkor $|A \times B| = nm$.

48. Tétel. Ha $|A| = n$, akkor $|\text{Sym}(A)| = n!$.

49. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra ha B és C diszjunktak, akkor $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$. Ha $|A| = n$ és $|B| = m$, akkor $|A^B| = n^m$.

50. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra $|(A^B)^C| = |A^{(B \times C)}|$.

51. Tétel. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z}[x]| = |\mathbb{Q}|$, ahol $\mathbb{Z}[x]$ az egészegyütthatós polinomok halmaza (egészek olyan (a_0, a_1, a_2, \dots) végtelen sorozatai, amelyek egy idő után azonosan nullák).

52. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \neq |\mathbb{N}|$.

53. Tétel (Cantor-tétel). Tetszőleges A halmazra $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$.

54. Definíció. Az A halmaz **véges**, ha létezik olyan n nemnegatív egész, hogy $|A| = n$. Az A halmaz **megszámlálhatóan végtelen**, ha $|A| = |\mathbb{N}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \aleph_0$. Az A halmaz **megszámlálható**, ha A véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az A halmaz **kontinuum számosságú**, ha $|A| = |\mathbb{R}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \mathfrak{c}$.

55. Tétel. Az A halmaz akkor és csak akkor véges, ha minden $f: A \rightarrow A$ ijektív (szürjektív) leképezés bijektív.

56. Definíció. Ha létezik injektív leképezés A -ból B -be, akkor azt írjuk, hogy $|A| \leq |B|$.

57.* Tétel (Schröder-Bernstein-tétel). Tetszőleges A, B halmazokra ha léteznek $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow A$ injektív leképezések, akkor létezik $h: A \rightarrow B$ bijektív leképezés is. Tehát ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.

4. AXIOMATIKUS FELÉPÍTÉS

58. Példa (Russel-paradoxon). A 7. definíciót felhasználva definiáljuk az

$$R = \{x : x \text{ halmaz, és } x \notin x\}$$

halmazt. Ekkor se $R \in R$, se $R \notin R$ nem teljesülhet, tehát R nem lehet halmaz.

59. Megjegyzés. A halmazelmélet axiomatikus felépítésében meg kell követelnünk, hogy a 7. definícióban szereplő U individuumtartomány csak halmaz lehet (például az összes halmaz összessége nem), és így elkerülhető a Russel-paradoxon.

60. Megjegyzés. Ha a 7. definíciót csak részhalmazok definiálására használhatjuk, akkor külön meg kell követelnünk, hogy létezik az üres halmaz, és tetszőleges A, B halmazokra léteznek az $\{A, B\}$, $A \cup B$ és $\mathcal{P}(A)$ halmazok is.

61.* Definíció. Tetszőleges a, b elemekre definiáljuk az $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ **rendezett elempárt**. Ekkor az elempárról elvárt tulajdonságok teljesülnek.

62.* Megjegyzés. Az előbb megkövetelt halmazok létezésén kívül feltesszük még, hogy van végtelen halmaz (olyan A halmaz, hogy ha $x \in A$, akkor $x \cup \{x\} \in A$), és azt, hogy minden nemüres A halmaznak van olyan $x \in A$ eleme, hogy $A \cap x = \emptyset$.

63.* Definíció. Az előző megjegyzésekben leírt tulajdonságok (végtelen sok) formulával formalizálhatók. Ezen formulák összességét nevezik a halmazelmélet **Zermelo-Fraenkel axiómarendszerének**, vagy röviden **ZF**-nek.

64.* Definíció. Az I halmaz minden $i \in I$ elemére legyen adva egy nemüres A_i halmaz. Az

$$f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

leképezést **kiválasztási függvénynek** nevezzük, ha $f(i) \in A_i$ minden $i \in I$ -re.

65.* Definíció. A **kiválasztási axióma** az az állítás, hogy az előző definícióban tetszőlegesen megválasztva az I halmazt és a nemüres A_i halmazokat létezik kiválasztási függvény. A halmazelmélet **ZFC** axiómarendszere alatt a ZF axiómarendszert a kiválasztási axiómával együtt értjük.

66.* Tétel. Ha van interpretációja a halmazelméletnek (ZF), akkor van olyan is ahol a kiválasztási axióma teljesül, és olyan is ahol nem.

67.* Definíció. A **kontinuumhipotézis** az az állítás, hogy tetszőleges A halmazra $|A| \leq |\mathbb{N}|$ vagy $|\mathbb{R}| \leq |A|$.

68.* Tétel. Ha van interpretációja a halmazelméletnek (ZFC), akkor van olyan is ahol a kontinuumhipotézis teljesül, és olyan is ahol nem.