6. feladatsor – Halmazok, megfeleltetések, leképezések

A feladatsorban $\mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}^-$ jelöli a pozitív, illetve negatív valós számok halmazát. Az $\{1, 2, \ldots\}$ halmazt $\mathbb{N}$ jelöli, $\underline{n}$ pedig az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt.

6.1. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(2,3),(2,1),(1,5),(4,4),(3,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$$
$$\beta = \{(1,4),(5,3),(4,2),(3,2),(1,3),(2,4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$$

(1) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
(2) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
(3) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.2. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(1) $\varphi_1 = \{(1,4),(2,3),(5,3),(6,1),(3,3),(4,4)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,
(2) $\varphi_2 = \{(1,4),(4,2),(3,1),(2,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{6}$,
(3) $\varphi_3 = \{(1,5),(2,3),(5,4),(3,1),(4,2)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$.

6.3. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(1) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
(2) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
(3) $A \triangle (A \triangle B) = B$.

6.4. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
(2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
(3) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

6.5. Feladat. Határozzuk meg az α és β leképezések $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatait. Az x szám n-es maradékát $\overline{x}^{(n)}$-nel jelöljük.

(1) $\alpha\colon \underline{7} \to \underline{3}, x \mapsto \overline{x}^{(3)} + 1$ $\qquad$ $\beta\colon \underline{4} \to \underline{7}, x\beta = \overline{x}^{(7)} + 1$,

(2) $\alpha\colon \underline{6} \to \underline{4} = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(2,3),(3,1), \\ (4,3),(5,2),(6,4) \end{array} \right\}$, $\quad \beta\colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \begin{cases} x-1 & \text{ha } x \text{ páros} \\ x+2 & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$

6.6. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1,2),(2,3),(4,1),(2,5),(1,1)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$$
$$\beta = \{(5,2),(4,1),(3,2),(2,1),(1,4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$$

(1) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
(2) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
(3) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.7. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott részhalmazok előállnak-e $A \times B$ alakban.

(1) $\{(x,y) : x = 2, y \text{ tetszőleges}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(2) $\{(x,y) : x - y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $\{(1,2),(2,3),(1,3),(2,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$.

6.8. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(2,3),(2,1),(4,4),(3,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$$
$$\beta = \{(1,4),(5,3),(2,1),(4,2),(3,1),(1,3),(2,4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$$

(1) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
(2) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
(3) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.9. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(2,3),(1,5),(3,4),(4,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$$
$$\beta = \{(5,1),(2,3),(1,3),(4,2),(3,1),(2,4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$$

(1) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
(2) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
(3) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.10. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott részhalmazok előállnak-e $A \times B$ alakban.

(1) $\{(x,y) : 2 \leq x < 3, -1 < y < 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(2) $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $\{(1,2),(1,3),(2,3),(1,4)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$.

6.11. Feladat. Adjuk meg az összes, $\underline{3}$-ból $\{a,b,c\}$-be menő bijektív leképezést.

6.12. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(1) $\varphi_1 = \{(1,2),(2,3),(5,3),(6,1),(3,3),(4,1)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,
(2) $\varphi_2 = \{(1,4),(4,2),(3,1),(2,5)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{6}$,
(3) $\varphi_3 = \{(1,5),(2,3),(5,2),(3,1),(4,2)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$.

6.13. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B halmazokra

(1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
(2) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, de általában $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

6.14. Feladat. Adjuk meg az összes, $\underline{3}$-ból $\underline{2}$-be menő injektív, illetve szürjektív leképezést.

6.15. Feladat. Határozzuk meg az α és β leképezések $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatait. Az x szám n-es maradékát $\overline{x}^{(n)}$-nel jelöljük.

(1) $\alpha \colon \underline{6} \to \underline{4},\ x \mapsto \overline{x}^{(4)} + 1$ $\qquad \beta \colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \overline{x}^{(6)} + 1$,

(2) $\alpha \colon \underline{6} \to \underline{4} = \left\{ \begin{array}{c} (1,2),(2,4),(3,3), \\ (4,1),(5,2),(6,3) \end{array} \right\}$, $\quad \beta \colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \begin{cases} x+2 & \text{ha } x \text{ páros} \\ x & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$

6.16. Feladat. Adjuk meg az összes, $\underline{2}$-ből $\underline{3}$-ba menő injektív, illetve szürjektív leképezést.