1. feladatsor – Számelmélet

1.1. Feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.
(a) $a = 144$, $b = 89$;
(b) $a = -1183$, $b = 1573$.

1.2. Feladat. Teljesül-e, hogy tetszőlegesen megadott nyolc darab háromjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy ezeket egymás mellé írva, a kapott szám 7-tel osztható?

1.3. Feladat. Igaz-e, hogy bármely 3-mal nem osztható egész szám négyzetéből 1-et levonva 3-mal osztható számot kapunk?

1.4. Feladat. Adjuk meg azt a 3 legkisebb egymás után következő természetes számot, amelynek összege négyzetszám és egyben köbszám.

1.5. Feladat. Teljesülnek-e a következő oszthatóságok? ($n \in \mathbb{N}$)
(a) $6 \mid 17^n - 11^n$;
(b) $6 \mid n^3 - n$;
(c) $3 \mid 2 \cdot 7^n - 2$.

1.6. Feladat. Teljesül-e, hogy bármely 3-nál nagyobb prímszám négyzete 24-gyel osztva 1-et ad maradékul?

1.7. Feladat. Teljesül-e, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel?

1.8. Feladat. Igaz-e, hogy bármely természetes szám egy számjegyének megváltoztatásával prímszámmá alakítható?

1.9. Feladat. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből állítsunk össze öt különböző prímszámot, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használjunk fel.

1.10. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $10^{2k+1}+1$ és $10^{2k}-1$ osztható 11-gyel minden k nemnegatív egész számra, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy egy szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek váltakozó előjelű összege osztható 11-gyel, azaz

$$11 \mid \overline{a_n \cdots a_1 a_0} \iff 11 \mid a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n.$$

1.11. Feladat. Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2 + 1$ is prím.

1.12. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok és $2a + 9b$ osztható 17-tel, akkor $33a + 89b$ is osztható 17-tel.

1.13. Feladat. Adjuk meg az összes olyan a egész számot, amelyre a, $a + 10$ és $a + 14$ is prímszám.

1.14. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prímszám valamely $n \in \mathbb{N}$-re, akkor n is prímszám.

1.15. Feladat. Igaz-e, hogy ha egy négyjegyű szám számjegyeit fordított sorrendben felírjuk, és az eredeti számmal összeadjuk, akkor az összeg osztható 11-gyel?

1.16. Feladat. Teljesülnek-e a következő oszthatóságok? ($n \in \mathbb{N}$)

(a) $17 \mid 2^{16} - 1$;
(b) $7 \mid n^7 - n$;
(c) $9 \mid 7^n + 3n - 1$.

1.17. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám nem osztható 5-tel, akkor a négyzetéhez 1-et hozzáadva vagy levonva 5-tel osztható számot kapunk.

1.18. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely egész szám négyzetét 16-tal osztva, maradékul négyzetszámot kapunk.

1.19. Feladat. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímszám.

1.20. Feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.
(a) $a = 377$, $b = 233$;
(b) $a = -1253$, $b = -3241$.

1.21. Feladat. Teljesülnek-e a következő oszthatóságok? ($n \in \mathbb{N}$)
(a) $2 \mid n^2 - n$;
(b) $15 \mid 2^{16} - 1$;
(c) $30 \mid n^5 - 5$.

1.22. Feladat. Az a egész szám értékét adjuk meg úgy, hogy a, $a + 4$ és $a + 14$ számok prímek legyenek.

1.23. Feladat. Palindrom számnak az olyan számokat nevezzük, amelyeknek tízes számrendszerbeli felírása oda-vissza ugyanaz. Mutassuk meg, hogy minden páros hosszúságú palindrom szám osztható tizeneggyel.

1.24. Feladat. Igaz-e, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul?

1.25. Feladat. Miért nem lehet egyszerre egész $\dfrac{n+1}{15}$ és $\dfrac{n+8}{21}$, ahol $n \in \mathbb{N}$?

1.26. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $1+2+3 \mid 1^n+2^n+3^n$ teljesül bármely páratlan n természetes szám esetén.

1.27. Feladat. Van-e olyan négyzetszám, amely
(a) 7-tel osztva 3-at ad maradékul;
(b) 8-cal osztva 3-at ad maradékul;
(c) 6-tal osztva 3-at ad maradékul;
(d) 9-cel osztva 3-at ad maradékul?

1.28. Feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.
(a) $a = 368$, $b = 161$;
(b) $a = 539$, $b = 1001$.

1.29. Feladat. Mutassuk meg, hogy a következő számok összetett számok.
(a) $10^6 - 5^7$;
(b) $10^{100} - 7$;
(c) $4^{20} - 1$;

(d) 1000027;
(e) $1000\dots001$ (2012 darab 0);
(f) $1! + 2! + 3! + \dots + 100!$.

1.30. Feladat. Milyen n egész számra lesz a $\frac{3n^2+6n+10}{n+2}$ egész szám?

1.31. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $10^k - 1$ osztható 9-cel minden k nemnegatív egész számra, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek összege osztható 9-cel, azaz

$$9 \mid \overline{a_n \cdots a_1 a_0} \iff 9 \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

1.32. Feladat. Mutassuk meg, hogy bármely a, b egész számokra teljesül, hogy $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$. Döntsük el ennek a szabálynak a segítségével, hogy osztható -e héttel a 334989655 szám!

1.33. Feladat. Euklideszi algoritmussal határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét.
(a) $310, 245$;
(b) $678, -294$.

1.34. Feladat. Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2 + 1$ is prím.

1.35. Feladat. Igazoljuk, hogy a $11, 111, 1111, \dots$ sorozatban nincsenek négyzetszámok.