12. feladatsor – Műveleti tulajdonságok

Ismét $\underline{n}$ jelöli az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt, és D_n jelöli az n pozitív osztóinak halmazát.

12.1. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi grupoidoknak van-e egységeleme, illetve zéruseleme.

(1) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(2) $(\mathbb{Z}, \star)$, ahol $a \star b = a + (-1)^a b$,
(3) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \star)$, ahol $(a_1, b_1) \star (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$.

12.2. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi grupoidoknak van-e egységeleme, illetve zéruseleme.

(1) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = a$,
(2) $(\mathbb{N}, \star)$, ahol $a \star b = ab - a + b$,
(3) $(P(U), \triangle)$, ahol U tetszőleges halmaz.

12.3. Feladat. Definiáljuk az S_8 halmazon a következő műveletet:

$$\alpha \star \beta = \alpha(1\ 3\ 4)(2\ 5)\beta.$$

Határozzuk meg az $(S_8, \star)$ grupoid egységelemét és döntsük el, hogy van-e minden elemnek inverze.

12.4. Feladat. Tekintsük az $\underline{4}$ halmaz alábbi műveletét (a táblázat i. sorának j. eleme az $i \circ j$ elem):

$\circ$	1	2	3	4
1	2	4	1	1
2	1	3	2	4
3	1	2	3	4
4	4	4	4	4

Döntsük el, hogy az $(\underline{4}, \circ)$ grupoid egységelemes, zéruselemes, kommutatív, illetve asszociatív-e.

12.5. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi grupoidok idempotensek, illetve kommutatívok-e.

(1) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = a$,
(2) $(\mathbb{N}, \star)$, ahol $a \star b = ab - a + b$,
(3) $(P(U), \triangle)$, ahol U tetszőleges halmaz.

12.6. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi grupoidok idempotensek, illetve kommutatívok-e.

(1) $(\mathbb{R}^+, \circ)$, ahol $a \circ b = a^b$,
(2) $(\mathbb{N}, \text{lnko})$,
(3) $(P(U), \star)$, ahol U tetszőleges halmaz és $A \star B = A \setminus \overline{B}$.

12.7. Feladat. Tekintsük az $\underline{4}$ halmaz alábbi műveletét (a táblázat i. sorának j. eleme az $i \circ j$ elem):

$\circ$	1	2	3	4
1	2	2	3	1
2	2	2	2	2
3	1	2	4	4
4	3	2	2	4

Döntsük el, hogy az $(\underline{4}, \circ)$ grupoid egységelemes, zéruselemes, kommutatív, illetve asszociatív-e.

12.8. Feladat. Definiáljuk az $\mathbb{R}$ halmazon az $\oplus$ és $\odot$ műveleteket a következőképpen:

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ és } a \odot b = a + b - ab.$$

Döntsük el, hogy disztibutív, illetve abszorptív-e $\odot$ az $\oplus$-ra.

12.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi grupoidoknak van-e egységeleme, illetve zéruseleme.

(1) $(\mathbb{R}^+, \circ)$, ahol $a \circ b = a^b$,
(2) $(\mathbb{N}, \mathrm{lnko})$,
(3) $(P(U), \star)$, ahol U tetszőleges halmaz és $A \star B = A \setminus \overline{B}$.

12.10. Feladat.

(1) Teljesül-e tetszőleges asszociatív, egységelemes grupoid bármely a, b, c elemére, hogy $a \circ c = b \circ c \Longrightarrow a = b$?
(2) Teljesül-e tetszőleges asszociatív, egységelemes grupoidban, ahol minden elemnek van inverze, bármely a, b, c elemre, hogy $a \circ c = b \circ c \Longrightarrow a = b$?

Vezessük le, vagy adjunk ellenpéldát!

12.11. Feladat. Határozzuk meg a következő grupoidok egységelemét és döntsük el, hogy minden elemnek van-e inverze.

(1) $(\mathbb{R}^+, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(2) $(\mathbb{N}, \mathrm{lkkt})$,
(3) $(P(U), \triangle)$, ahol U tetszőleges halmaz.

12.12. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi grupoidok idempotensek, illetve kommutatívok-e.

(1) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(2) $(\mathbb{Z}, \star)$, ahol $a \star b = a + (-1)^a b$,
(3) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \star)$, ahol $(a_1, b_1) \star (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$.

12.13. Feladat. Ebben a feladatban x' jelöli egy csoport x elemének az inverzét.

(1) Teljesül-e tetszőleges csoportban bármely a, b, c elemre, hogy $(a \circ a') \circ b = (c' \circ c) \circ b$?
(2) Teljesül-e tetszőleges csoportban bármely a elemre, hogy $a = a' \Longrightarrow a^2 = e$?

Vezessük le, vagy adjunk ellenpéldát!

12.14. Feladat. Tekintsük az $\underline{4}$ halmaz alábbi műveletét (a táblázat i. sorának j. eleme az $i \circ j$ elem):

$\circ$	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

Döntsük el, hogy az $(\underline{4}, \circ)$ grupoid egységelemes, zéruselemes, kommutatív-e, illetve hogy van-e minden elemnek inverze.

12.15. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ grupoidot, ahol $\circ$ a szokásos leképezésszorzás. Legyen $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \lfloor x + 1/2 \rfloor$, ahol $\lfloor x \rfloor$ jelöli az x szám alsó egészrészét. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\varphi\psi = \mathrm{id}$, illetve olyat is, melyre $\psi\varphi = \mathrm{id}$.

12.16. Feladat.

(1) Teljesül-e tetszőleges kommutatív grupoid bármely a, b, c, d elemére az $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$ egyenlőség?

(2) Teljesül-e tetszőleges asszociatív grupoid bármely a, b, c, d elemére az $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$ egyenlőség?

Vezessük le, vagy adjunk ellenpéldát!

12.17. Feladat.

(1) Teljesül-e tetszőleges asszociatív grupoid bármely a, b, c elemére az $(a \circ b) \circ c = (b \circ c) \circ a$ egyenlőség?

(2) Teljesül-e tetszőleges asszociatív és kommutatív grupoid bármely a, b, c elemére az $(a \circ b) \circ c = (b \circ c) \circ a$ egyenlőség?

Vezessük le, vagy adjunk ellenpéldát!

12.18. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ grupoidot, ahol $\circ$ a szokásos leképezésszorzás. Legyen $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 2x$. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\varphi\psi = \mathrm{id}$, illetve olyat is, melyre $\psi\varphi = \mathrm{id}$.