

## 11. feladatsor – Részbenrendezések

Ismét  $n$  jelöli az  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmazt, és  $D_n$  jelöli az  $n$  pozitív osztóinak halmazát.

**11.1. Feladat.** Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Melyek rendezések?

- (1)  $(D_{30}; \leq)$ ;
- (2)  $(D; \sqsubseteq)$ , ahol  $D = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$ , és  $a \sqsubseteq b$  pontosan akkor teljesül, ha  $a$  minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint  $b$  megfelelő számjegye.

**11.2. Feladat.** Adjunk meg olyan Hasse-diagramot, amelyben

- (1) 3 minimális elem van, nincs legnagyobb elem, és összesen 4 eleme van,
- (2) egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

**11.3. Feladat.** Adjuk meg azon részbenrendezés elemeit, melynek a fedési relációja a következő:

$$\{(a, b) \in \underline{8} \times \underline{8} : b = 2a\}$$

**11.4. Feladat.** Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek alkotnak részbenrendezést, és melyek rendezést a megadott halmazon:

- (1)  $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{6}$
- (2)  $(\mathbb{Z}; |) = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \mid b\}$

**11.5. Feladat.** Adjunk meg olyan Hasse-diagramot, amelyben

- (1) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 5 eleme van,
- (2) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 3 eleme van.

**11.6. Feladat.** Hány részbenrendezése van egy négyelemű halmaznak? És hány rendezése?

**11.7. Feladat.** Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek alkotnak részbenrendezést, és melyek rendezést a megadott halmazon:

- (1)  $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\} \subseteq \underline{8} \times \underline{8}$
- (2)  $\{(A, B) \in \mathcal{P}(\underline{3}) \times \mathcal{P}(\underline{3}) : |A| \leq |B|\}$

**11.8. Feladat.** Adjuk meg a következő reláció tranzitív lezártját:

$$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a - b = 0\}.$$

**11.9. Feladat.** Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Melyek rendezések?

- (1)  $(C; |)$ , ahol  $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$ ;
- (2)  $(E; \triangleleft)$ , ahol  $E = \{121, 123, 222, 145, 346, 743, 777, 325, 220\}$ , és  $\overline{abc} \triangleleft \overline{def} \iff (a < d) \vee ((a = d) \wedge (b < e)) \vee ((a = d) \wedge (b = e) \wedge (c \leq f))$

**11.10. Feladat.** Adjuk meg azon részbenrendezés elemeit, melynek a fedési relációja a következő:

$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(\{a, b, c, d\}) : ((A = B \cup \{a\}) \vee (A = B \cup \{b\})) \wedge (A \neq B)\}$$

**11.11. Feladat.** Adjuk meg a következő reláció tranzitív lezártját:

$$\{(2, 3), (1, 3), (2, 5), (5, 5), (1, 2), (3, 1), (5, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$$

**11.12. Feladat.** Adjunk meg olyan Hasse-diagramot, amelyben

- (1) bármely két elem összehasonlítható, és összesen 5 eleme van,
- (2) bármely két elem összehasonlítható, és nincs benne legkisebb elem.

**11.13. Feladat.** Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Melyek rendezések?

- (1)  $(A; \subseteq)$ , ahol  $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ ;
- (2)  $(D_{30}; |)$ .

**11.14. Feladat.** Adjuk meg a következő reláció tranzitív lezártját:

$$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = a + 1\}.$$

**11.15. Feladat.** Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Melyek rendezések?

- (1)  $(B; \subseteq)$ , ahol  $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ;
- (2)  $(D_{48} \cap D_{120}; |)$

**11.16. Feladat.** Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek alkotnak részbenrendezést, és melyek rendezést a megadott halmazon:

- (1)  $(\mathbb{R}, < ) = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a < b\}$
- (2)  $(\mathbb{Z}^-, | ) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^- : a | b\}$

**Természetesen akinek a sorszámja 16-nál nagyobb, az vegye a 16-os maradékát.**