10. feladatsor – Relációk, osztályozások

Ismét $\underline{n}$ jelöli az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt.

10.1. Feladat. Hány olyan ekvivalenciája van a $\underline{8}$ halmaznak, melyhez tartozó osztályozásnak

(1) 3 osztálya van, melyek $1, 2, 5$ eleműek;
(2) 3 osztálya van.

10.2. Feladat. Add meg a következő φ leképezések magjához tartozó osztályozást.

(1) $\varphi\colon \underline{4} \times \underline{4} \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x$,
(2) $(1\ 3\ 4)(5\ 4) \in S_5$.

10.3. Feladat. Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(1) $\{(a, b) : a^2 + b^2 = 1\}$ az $\mathbb{R}$, illetve $[0, 1]$ halmazokon,
(2) $\{\big((a, b), (c, d)\big) : a + d = b + c\}$ az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon.

10.4. Feladat. Add meg az A halmazon értelmezett ρ ekvivalenciához tartozó osztályozást.

(1) $A = \underline{4}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}$,
(2) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : xy > 0 \text{ vagy } x = y = 0\}$.

10.5. Feladat. Add meg a következő φ leképezések magjához tartozó osztályozást.

(1) $\varphi\colon P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \to \mathbb{N}, A \mapsto |A|$,
(2) $(1\ 3\ 5)(2\ 4) \in S_5$.

10.6. Feladat. Legyen $\underline{7} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hány eleme van azon $\rho \subseteq \underline{7} \times \underline{7}$ ekvivalenciának, melynek

(1) 2 osztálya van, melyek $3, 4$ eleműek,
(2) 4 osztálya van, melyek $1, 2, 2, 2$ eleműek.

10.7. Feladat. Add meg az A halmazon értelmezett ρ ekvivalenciához tartozó osztályozást.

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$,
(2) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : (\exists a \in \mathbb{Z}) : 3a \leq x, y < 3a + 3\}$.

10.8. Feladat. Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(1) $\{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,
(2) $\{(a, b) : |a - b| > 1\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon.

10.9. Feladat. Adj meg olyan relációt (bármilyen halmazon), mely

(1) reflexív és szimmetrikus, de nem tranzitív;
(2) reflexív és tranzitív, de nem szimmetrikus;
(3) szimmetrikus és tranzitív, de nem reflexív.

10.10. Feladat. Adjunk meg olyan osztályozást a $\underline{8}$ halmazon, melynek 3 osztálya van, és melyhez tartozó ρ ekvivalenciára teljesülnek a következő feltételek:

(1) $(1, 3), (2, 6) \in \rho$,
(2) $(1, 2) \in \rho, (1, 3), (2, 4), (3, 5) \notin \rho$.

10.11. Feladat. Legyen ρ az $\underline{6}$ halmaz megadott osztályozáshoz tartozó ekvivalencia. Hány eleme van ρ-nak? Add meg ρ legalább 5 olyan (x, y) elemét, melyekre $x \neq y$.

(1) $\{\{1,4\},\{2,5,6\},\{3\}\}$,
(2) $\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$.

10.12. Feladat. Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(1) $\{(1,5),(2,5),(3,1),(3,5),(3,2),(4,2),(4,6)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,
(2) $\{(e,f) : e$ és f-nek van közös pontja$\}$ a sík egyeneseinek halmazán.

10.13. Feladat. Hány eleme van azon $\rho \subseteq \underline{7} \times \underline{7}$ ekvivalenciának, melynek

(1) 3 osztálya van, melyek $1, 2, 4$ eleműek,
(2) 3 osztálya van, melyek $2, 2, 3$ eleműek.

10.14. Feladat. Hány eleme lehet egy A halmazon megadott $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciának, ha

(1) $|A| = 1$,
(2) $|A| = 2$,
(3) $|A| = 4$.

10.15. Feladat. Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(1) $\{(a,b) : |a| = |b|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon,
(2) $\{(a,b) : a/b \leq b/a\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon.

10.16. Feladat. Hány olyan ekvivalenciája van a $\underline{7}$ halmaznak, melyhez tartozó osztályozásnak

(1) 4 osztálya van, melyek $2, 2, 5$ eleműek;
(2) 3 osztálya van.

10.17. Feladat. Adjunk meg olyan osztályozást a $\underline{8}$ halmazon, melynek 3 osztálya van, és melyhez tartozó ρ ekvivalenciára teljesülnek a következő feltételek:

(1) $(1,2),(3,4) \in \rho$,
(2) $(1,3) \in \rho, (3,5),(2,7),(3,4) \notin \rho$.

Természetesen akinek a sorszáma 17-nél nagyobb, az vegye a 17-es maradékát.