MBN412G: ALKALMAZOTT ALGEBRA GYAKORLAT
2015. ÁPRILIS 26.

1. Lineáris algebra, csoportok definíciója

1.1. Feladat. (Közösen megbeszéltük) Adjunk meg olyan φ lineáris transzformációját a síknak, amelyre

(1) φ-nek 1-dimenziós a képtere;
(2) φ-nek nincsen sajátértéke;
(3) $\varphi + \varphi^2 = -\mathrm{id}$.

1.2. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Legyen φ a sík $3x-4y=0$ egyenletű egyenesére való tengelyes tükrözés. Adjuk meg φ mátrixát az $(1,-1)$, $(3,2)$ bázisban.

1.3. Feladat. Legyen T test. Igazoljuk, hogy bármely $p \in T[x]$ főpolinomhoz megadható olyan T feletti mátrix, melynek karakterisztikus polinomja p.

1.4. Feladat. Az f_n Fibonacci-számsorozathoz létezik olyan A valós mátrix, hogy $(f_{n+1}\ f_{n+2}) = (f_n\ f_{n+1})A$, amelyből kapjuk, hogy

$$(f_n\ f_{n+1}) = (0\ 1)A^n.$$

Keressük meg A sajátértékeit és sajátvektorait, majd írjuk fel az A mátrixot $X^{-1}DX$ alakban, ahol D diagonális, és ezek segítségével adjunk zárt képletet f_n-re.

1.5. Feladat. Hány eleme van a $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}_3, 2)$ csoportnak? Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{Z}_3, 2).$$

Ekkor az A mátrixszal való jobb oldali szorzás permutáció a $\mathbb{Z}_3^2$ vektortér elemeinek halmazán. Írjuk fel ezt a permutációt páronként idegen ciklusokra bontott alakban. A $\mathbb{Z}_3^2$ halmaz mely permutációi kaphatók meg ilyen alakban?

1.6. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna, Endre) Milyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz az alábbi halmaz a megadott műveletre nézve csoport?

$$(\mathbb{R}, \circ),\ \text{ahol } x \circ y = ax + by + c \text{ tetszőleges } x, y \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

1.7. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban tetszőleges a, b, c, d, g, x, y elemekre?

(1) $axb = ayb \Rightarrow x = y$,

(2) $abx = bay \Rightarrow x = y$,
(3) $cxd = dyc \Rightarrow x = y$,
(4) $abc = dbg \Rightarrow ac = dg$,
(5) $ax = 1 \Rightarrow x = a^{-1}$,
(6) $abx = 1 \Rightarrow x = a^{-1}b^{-1}$,
(7) $xab = c \Rightarrow x = cb^{-1}a^{-1}$,
(8) $xab = a \Rightarrow x = b^{-1}$.

A helyes következtetéseket igazolja, a hamisakra adjon ellenpéldát.

1.8. Feladat. (Megoldotta Endre, Péter) Egészítse ki az alábbi művelettáblázatot úgy, hogy csoport művelettáblázatát kapja:

$\cdot$	e	a	b	x	y	z
e	e					
a		b		y		
b		e				
x		z				
y						
z						

Választásait minden esetben indokolja.

1.9. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Adjon meg olyan elemet a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, amelyben nem szerepel 0, azonban csak véges sok különböző hatványa van.

1.10. Feladat. Hány eleme van a szabályos tetraéder mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

1.11. Feladat. (Megoldotta Péter) Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

1.12. Feladat. Írja le a $\mathbb{Z}_6$, R_7, S_3, $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}_2, 2)$ és E_6 csoportok művelettáblázatát, ahol E_6 a hatodik egységgyökök halmaza. Melyek izomorfak ezek közűl (az elemeket átnevezve ugyan azt a műveletet kapjuk)?

1.13. Feladat. Adja meg a G csoport azon elemeit, amelyek előállnak az a elem pozitív egész kitevős hatványaiként, illetve egész kitevős hatványaiként.

(1) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $a = 1$,
(2) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $a = 3$,
(3) $G = D_5$, a pedig a középpont körüli $\frac{2\pi}{5}$ szöggel való forgatás,
(4) $G = (P(\{1, 2, 3\}; \triangle)$, $a = \{1, 2\}$,
(5) $G = (\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 3), \cdot)$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,
(6) $G = (R_{18}, \cdot)$, $a = \overline{7}$,
(7) $G = (R_{24}, \cdot)$, $a = \overline{5}$.

1.14. Feladat. (Megoldotta Péter) Mutassa meg, hogy a

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

halmazon egyetlen olyan asszociatív szorzás létezik, amelyre teljesülnek a következők:

- az $\{1, -1, i, -i\}$ részhalmazban ugyanúgy szorzunk, mintha a felsorolt elemek komplex számok lennének,
- az $\{1, -1, j, -j\}$ és $\{1, -1, k, -k\}$ részhalmazban ugyanígy számolunk, csak i helyett j-vel és k-val,
- $ij = k, jk = i, ki = j$.

Továbbá igazolja, hogy Q csoportot alkot erre a szorzásra nézve (ezt a csoportot *kvaterniócsoportnak* nevezik).

2. Permutációk

2.1. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna, Endre, Péter) Adja meg az alábbi permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként, és határozza meg paritásukat:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$,
(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{1433}$,
(3) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 2\ 4\ 6)(2\ 4\ 6)$,
(4) $(2\ 4\ 5)(1\ 3\ 5)^{-1}(1\ 2)$,
(5) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^4$.

2.2. Feladat. Milyen lehet a szerkezete szerkezete (azaz a páronként idegen ciklusokra bontott alakjában milyen hosszúságú ciklusok szerepelnek, és melyikből mennyi)

(1) egy 2 és egy $n > 2$ hosszúságú,
(2) egy 3 és egy $n > 3$ hosszúságú

ciklus szorzatának (ebben, illetve a fordított sorrendben)?

2.3. Feladat. (Közösen megbeszéltük) Oldja meg S_5-ben, illetve S_6-ben az alábbi egyenleteket:

(1) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$,
(2) $\pi^3 = \mathrm{id}$,
(3) $\pi^2 = (1\ 2)$.
(4) $\pi^2 = (1\ 2)(3\ 4)$.

2.4. Feladat. Legyen π az A halmaz egy permutációja. Adott $a \in A$ esetén az a elem *pályája* az $\{a\pi^k : k \in \mathbb{Z}\}$ halmaz.

(1) Igazolja, hogy a pályák halmaza osztályozása A-nak.
(2) Adja meg a $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto -k$ és a $\varrho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto k-1$ permutációk pályáit.

2.5. Feladat. Véges A halmaz esetén mi a kapcsolat a $\pi \in S_A$ permutáció pályái és π páronként idegen ciklusokra bontott alakja között?

2.6. Feladat. A páronként idegen ciklusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció négyzeteként (azaz második hatványaként).

2.7. Feladat. (Közösen megbeszéltük) A páronként idegen cikusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció hatodik hatványaként.

2.8. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna, Endre) Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

(1) tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációhoz létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$,
(2) létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$ teljesül minden $\pi \in S_n$ permutáció esetén.

Melyik a legkisebb olyan $k \in \mathbb{N}$ szám, amely a (2)-es pontot teljesíti?

2.9. Feladat. (Megoldotta Péter és Endre) Igazolja, hogy egy n hosszúságú ciklus nem írható fel $n-1$-nél kevesebb transzpozíció szorzataként.

2.10. Feladat. (Megoldotta Péter) Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Igazolja, hogy minden S_n-beli permutáció előáll

(1) az $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ transzpozíciók
(2) az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ \ldots\ n)$ ciklusok szorzataként.

2.11. Feladat. (Közösen megbeszéltük) Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Igazolja, hogy minden A_n-beli permutáció előáll

(1) 3 hosszúságú ciklusok szorzataként,
(2) az $(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4), \ldots, (n-2\ n-1\ n)$ ciklusok szorzataként.

2.12. Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Igazolja, hogy minden S_n-beli permutáció előáll $\alpha\beta$ alakban, ahol $\alpha^2 = \beta^2 = \mathrm{id}$.

2.13. Feladat. Legyen n rögzített, 1-nél nagyobb természetes szám. Bizonyítsa be, hogy ha két S_n-beli ciklus felcserélhető egymással, akkor mozgatott elemeik halmaza vagy diszjunkt, vagy egybeesik.

2.14. Feladat. (Közösen megbeszéltük) Igaz-e, hogy ha $\pi \in S_n$ nem mozgatja az 1-et és $\pi = \tau_1 \cdots \tau_k$ ahol $\tau_1, \ldots, \tau_k$ transzpozíciók, akkor páros sok τ_i transzpozíció mozgatja az 1-et?

3. Sajátértékek és diagonalizálhatóság

3.1. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna, Endre, Péter) Tudjuk, hogy az $\mathbb{R}^3$ vektortér az U_1 és U_2 altereinek direkt összege. Adjuk meg a v vektort egy U_1 és egy U_2-beli vektor összegeként.

(1) $U_1 = [(1, -1, 2), (1, 1, 1), (2, 0, 3)], U_2 = [(0, 0, 1)]$, $v = (0, -2, 2)$;
(2) U_1 az $x+y-2z=0$ egyenletű sík, U_2 az origón átmenő, $(1, 1, -2)$ irányvektorú egyenes, $v = (2, 2, -1)$.

3.2. Feladat. Határozzuk meg a V vektortér φ lineáris transzformációjának sajátértékeit, valamint döntsük el, hogy diagonalizálható-e.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, φ az $x - 2y = 0$ egyenesre való tengelyes tükrözés;
(2) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi\colon V \to V, (x, y, z) \mapsto (2z, x+z, y-2z)$;
(3) $V = \mathbb{R}^3$, φ az origón átmenő, $(1, -1, 2)$ irányvektorú egyenes körüli $\pi/4$ szöggel való forgatás.

3.3. Feladat. Határozzuk meg a V vektortér φ lineáris transzformációjának sajátértékeit, valamint döntsük el, hogy diagonalizálható-e.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, φ az origó körüli, $\pi/3$ szöggel való forgatás;
(2) $V = \mathbb{R}^3$, φ az $x+y-z=0$ egyenletű síkra való tükrözés;
(3) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi\colon V \to V, (x, y, z) \mapsto (z, x-3z, y+3z)$.

3.4. Feladat. Döntsük el az alábbi mátrixról, hogy diagonalizálható-e az $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$, illetve $\mathbb{Z}_3$ testek felett.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.5. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna, Endre, Péter)

(1) Írjuk fel az $\mathbb{R}^2$ vektorteret három nemtriviális altere direkt összegeként.
(2) Írjuk fel az $\mathbb{R}^2$ vektorteret három nemtriviális altere összegeként.
(3) Adjunk meg olyan 3×3-as valós mátrixot, melynek a sajátértékei $1, -1, 2$.
(4) Adjunk meg olyan 2×2-es valós mátrixot, melynek nincs (valós) sajátértéke.

3.6. Feladat. (Közösen megbeszéltük) Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. A válaszát minden esetben indokolja.

(1) Bármely háromdimenziós vektortér előállítható kettő darab kétdimenziós altere direkt összegeként.
(2) Ha a sík két origón átmenő egyenesének direkt összege, akkor a két egyenes merőleges egymásra.
(3) Ha a sík két origón átmenő egyenese merőleges, akkor a sík ezen két egyenes direkt összege.
(4) Ha a tér két origón átmenő egyenese merőleges, akkor a tér ezen két egyenes direkt összege.
(5) Ha egy 2×2-es valós mátrixnak 1 és -1 a sajátértékei, akkor a mátrix diagonalizálható.
(6) Ha egy 2×2-es valós mátrixnak nincs valós sajátértéke, akkor a mátrix diagonalizálható a komplex számtest felett.

(7) Egész számokból álló mátrix minden racionális sajátértéke egész.
(8) Ha egy 3×3-as valós mátrix karakterisztikus polinomja $-(x-2)(x^2+x+1)$, akkor nem diagonalizálható.
(9) Ha egy 3×3-as valós mátrix karakterisztikus polinomja $-(x-2)^2(x+1)$, akkor diagonalizálható.
(10) Ha egy 3×3-as valós mátrix karaketrisztikus polinomja $-(x-1)^3$, és diagonalizálható, akkor maga is diagonális.

3.7. Feladat. Adjunk meg olyan homogén lineáris egyenletrendszert, melynek megoldástere éppen az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi altere:

$$U = [(1,-1,2,1),(-1,1,3,2),(3,-3,-4,-3),(3,-3,1,0)].$$

3.8. Feladat. (Megoldotta Endre) Adjunk meg olyan valós mátrixot, melynek karakterisztikus polinomja $-(x+1)^3$, azonban nem diagonalizálható.

3.9. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Legyen V_n a legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok vektortere a valós számtest felett. Igaz-e, hogy $V_n = \operatorname{Ker} \mathrm{D} \oplus \operatorname{Im} \mathrm{D}$, ahol D a differenciálás, azaz

$$\mathrm{D}\colon V_n \to V_n,\ f \mapsto \mathrm{D}(f) = f'?$$

3.10. Feladat. Legyen V vektortér, és rögzítsünk egy $v \in V$ vektort, valamint egy λ skalárt. Döntsük el, hogy az alábbi két halmaz altér-e a lineáris transzformációk $\operatorname{Hom}(V,V)$ vektorterében:

$$A = \{\, \varphi \in \operatorname{Hom}(V,V) \mid v \text{ sajátvektora } \varphi\text{-nek} \,\};$$
$$B = \{\, \varphi \in \operatorname{Hom}(V,V) \mid \lambda \text{ sajátértéke } \varphi\text{-nek} \,\}.$$

3.11. Feladat. (Megoldotta Péter) Igazoljuk, hogy ha A és B azonos méretű valós mátrixok, akkor AB és BA valós sajátértékei ugyanazok.

4. Elemek rendje

4.1. Feladat. Határozza meg a megadott elemek rendjét a megadott G csoportban:

(1) $G = S_6$; $(1\ 2\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)(1\ 4\ 6)^{-1}$,
(2) $G = \mathbb{Z}_{12}$; $\overline{5}, \overline{9}, \overline{11}$,
(3) $G = R_{18}$; $\overline{5}, \overline{7}$,
(4) $G = \mathbb{Q}$; $-1, \frac{5}{9}$.

4.2. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Adjon meg a G csoportban k rendű elemet:

(1) $G = S_9,\ k = 8, 15$,
(2) $G = D_{18},\ k = 6$,
(3) $G = \mathbb{C},\ k = 12$.

4.3. Feladat. (Megoldotta Péter) Határozza meg az alábbi csoportok véges rendű elemeit:

(1) $\mathbb{C}^*$,
(2) $\mathbb{Q}^*$,
(3) $\mathbb{Q}$,
(4) a kör szimmetriacsoportja.

4.4. Feladat. (Megoldotta Endre) Bizonyítsa be az alábbi, véges fokú permutációkra vonatkozó állításokat, vagy adjon rájuk ellenpéldát:
(1) Minden páros rendű permutáció páros.
(2) Minden páros permutáció rendje páros.
(3) Minden páratlan rendű permutáció páros.
(4) Minden páratlan permutáció páros rendű.

4.5. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Igazolja, hogy ha a, b egy csoport tetszőleges véges rendű elemei, akkor
(1) $o(a) = o(b^{-1}ab)$,
(2) $o(ab) = o(ba)$.
(3) ha $ab = ba$, akkor $o(ab) \mid \mathrm{lkkt}(o(a), o(b))$.

4.6. Feladat. Határozza meg a $G = \{f \in S_{\mathbb{R}}, xf = ax + b : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ csoport véges rendű elemeit.

4.7. Feladat. Adjon meg olyan végtelen csoportot, amelynek minden eleme véges rendű, valamint olyan végtelen csoportot, melyben csak véges sok véges rendű elem van. Van-e olyan csoport, amelynek véges sok végtelen rendű eleme van?

4.8. Feladat. Igazolja, hogy ha egy csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje ugyanaz, akkor az végtelen vagy prímszám.

4.9. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna, Endre, Péter) Igazolja, hogy ha egy csoport minden elemének rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

4.10. Feladat. (Megoldotta Péter) Mutassa meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

4.11. Feladat. Mutassa meg, hogy ha egy csoport valamely a, b elemeire és valamely $m, n \in \mathbb{Z}$ kitevőkre $ba = a^m b^n$, akkor az $a^m b^{n-2}$, $a^{m-2} b^n$ és ab^{-1} elemek rendje azonos.

4.12. Feladat. (Megoldotta Endre) Bizonyítsa be, hogy minden S_n-beli permutáció rendje egyenlő a páronként idegen ciklusok szorzataként történő előállításában fellépő ciklusok hosszainak legkisebb közös többszörösével.

4.13. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén van olyan csoport és abban két olyan másodrendű elem, amelyek szorzatának rendje k.

4.14. Feladat. Igazolja, hogy ha n-nek van két különböző páratlan prímosztója, akkor az R_n csoport minden elemének rendje kisebb $\varphi(n)$-nél.

4.15. Feladat. Tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén adjon meg az $\mathrm{SL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban k rendű elemet.

5. Részcsoportok

5.1. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna, Endre) Döntse el, hogy részcsoportot alkotnak-e az alábbi H halmazok a megadott G csoportban:

(1) $G = \mathbb{Z},\ H = \{k \in \mathbb{Z} : 6 \mid k\}$;
(2) $G = \mathbb{Z},\ H = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k$ vagy $3 \mid k\}$;
(3) $G = \mathbb{C}^*,\ H = \{c \in \mathbb{C}^* : c^n = 1$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re$\}$;
(4) $G = S_4,\ H$ az összes transzpozíciók halmaza S_4-ben;
(5) $G = \mathbb{Z}_8,\ H = R_8$.

5.2. Feladat. Bizonyítsa be az alábbi állításokat, vagy adjon rájuk ellenpéldát.

(1) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoportjára $H \cup K \leq G$.
(2) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoportjára $H \cap K \leq G$.
(3) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoportjára $H \triangle K \leq G$.

5.3. Feladat. (Megoldotta Endre) Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját:

(1) $G = \mathbb{Z}_{18},\ A = \{\overline{4}\}$,
(2) $G = \mathbb{Z},\ A = \{6, 10, 15\}$,
(3) $G = D_{12},\ A = \{a^2, at\}$,
(4) $G = S_4,\ A = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)\}$.

5.4. Feladat. Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját:

(1) $G = \{\varepsilon : \varepsilon^{18} = 1\},\ A = \{\cos\frac{\pi}{9} + i \sin\frac{\pi}{9}\}$,
(2) $G = \mathbb{Z}_{30},\ A = \{\overline{6}, \overline{15}\}$,
(3) $G = D_6,\ A = \{a^2, at\}$,
(4) $G = S_4,\ A = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)\}$.

5.5. Feladat. (Megoldotta Endre, Péter) Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok vagy sem:

(1) S_3,
(2) R_{13},
(3) R_{15}.

5.6. Feladat. Adjon meg $1, 2$, illetve 3 elemű minimális generátorrendszert az alábbi csoportokban (ha létezik).

(1) $\mathbb{Z}_{18}$,
(2) S_3.

5.7. Feladat. Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.

(1) $\mathbb{Z}_{18}$,
(2) V,
(3) $\mathbb{R}_{15}$,
(4) D_4.

5.8. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Mutassa meg, hogy a $\mathbb{C}^*$ csoportban részcsoportot alkot a következő halmaz:

$$E_{p^\infty} = \{\, u \in \mathbb{C}^* : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0, \text{ amelyre } u^{p^k} = 1 \,\} \quad (p \text{ prímszám}).$$

5.9. Feladat. Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját:

(1) $G = S_5$, $A = \{(1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5)\}$,
(2) $G = \mathbb{Q}$, $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$.

5.10. Feladat. (Megoldotta Péter) Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok vagy sem:

(1) A_3,
(2) R_{18},
(3) D_3.

5.11. Feladat. Adjon meg $1, 2$, illetve 3 elemű minimális generátorrendszert az alábbi csoportokban (ha létezik).

(1) D_6,
(2) Q.

5.12. Feladat. Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.

(1) A_4,
(2) Q.

5.13. Feladat. Igazolja, hogy S_n minden részcsoportjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.

5.14. Feladat. (Megoldotta Péter) Igazolja, hogy bármely G csoportra és bármely $H, K \leq G$-re $H \cup K$ pontosan akkor részcsoport, ha $H \subseteq K$ vagy $K \subseteq H$.

5.15. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Mutassa meg, hogy minden Abel-csoport

(1) véges rendű elemeinek halmaza,
(2) legfeljebb másodrendű elemeinek halmaza

részcsoportot alkot. Adjon példát olyan Abel-csoportra, melyben a legfeljebb harmadrendű elemek nem alkotnak részcsoportot.

5.16. Feladat. Adjon példát olyan G csoportra és annak olyan H, K részcsoportjára, amelyekre HK nem részcsoportja G-nek.

5.17. Feladat. Igazolja, hogy ha H egy G csoport véges részhalmaza és $H^2 = H$, akkor H részcsoport G-ben.

5.18. Feladat. Mely $n \geq 3$ természetes számok esetén generátorrendszere az

$$\{(1\ 2\ 3), (1\ 2\ \dots n)\}$$

halmaz az S_n csoportnak?

5.19. Feladat. Igazolja, hogy bármely

(1) $n \geq 2$-re S_n-nek,
(2) p prímszámra $L_{\mathbb{Z}_p}$-nek

van kételemű generátorrendszere.

5.20. Feladat. Mutassa meg, hogy ha egy G csoport generátorelemei felcserélhetők egymással, akkor G Abel-féle.

5.21. Feladat. Mutassa meg, hogy ha egy G csoport nem Abel-féle, de minden valódi részcsoportja Abel-féle, akkor G-nek van kételemű generátorrendszere.

5.22. Feladat. Igazolja, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van.

5.23. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoportját, amely nem ciklikus.

5.24. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az E_{p^∞} (p prímszám) csoport minden valódi részcsoportja ciklikus.

5.25. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoportnak, valamint az E_{p^∞} (p prímszám) csoportoknak nincs minimális generátorrendszere.

5.26. Feladat. Tetszőleges $n \geq 3$ esetén határozza meg a D_n csoport összes részcsoportját.

6. Izomorfia és Normálosztók

6.1. Feladat. (Megoldotta Péter, Zsuzsanna javítja) Döntse el, hogy létezik-e olyan φ homomorfizmus, amely teljesíti a megadott feltételt:

(1) $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3,\ 5\varphi = (1\ 2\ 3)$,
(2) $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_4,\ \overline{2}\varphi = \overline{2}$,
(3) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8,\ \overline{3}\varphi = \overline{2}$,
(4) $\varphi\colon Q \to V,\ i\varphi = (1\ 3)(2\ 4)$.

6.2. Feladat. Döntse el, hogy létezik-e

(1) $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$,
(2) $V \to \mathbb{Z}_4$,
(3) $D_4 \to S_4$

nemtriviális, szürjektív, illetve injektív homomorfizmus.

6.3. Feladat. Határozza meg az összes

(1) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{18}$,
(2) $D_4 \to \mathbb{Z}_4$

homomorfizmust.

6.4. Feladat. (Megoldotta Péter és Endre) Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(1) R_6 és R_4,
(2) R_{15} és $\mathbb{Z}_8$,
(3) D_4 és Q,
(4) a kör szimmetriacsoportja és $\mathbb{C}^*$,
(5) a kör mozgáscsoportja és az 1 abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportja.

6.5. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Adja meg az alábbi G csoportok g elemének képét a csoport Cayley-féle ábrázolásánál:

(1) $G = \mathbb{Z}_8,\ g = \overline{4}$,
(2) $G = S_3,\ g = (1\ 2)$,
(3) $G = D_6,\ g = a^3t$,
(4) $G = \mathbb{Z},\ g = -2$.

6.6. Feladat. Határozza meg az összes $S_3 \to S_4$ injektív homomorfizmust.

6.7. Feladat. Jelölje D_∞ az alábbi alakzat szimmetriacsoportját:

$$\cdots\ \mathrm{TTTTTTTTTTTTT}\ \cdots$$

Tetszőleges $n \geq 3$ egész esetén adjon meg szürjektív $D_\infty \to D_n$ homomorfizmust.

6.8. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Legyen G tetszőleges csoport, és jelölje $\varphi\colon G \to S_G$ a G csoport Cayley-ábrázolását. Mutassa meg, hogy a $G\varphi$ permutációcsoport rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(1) tetszőleges $\pi \in G\varphi \setminus \{\mathrm{id}\}$ permutáció mozgatja G összes elemét, azaz $g\pi \neq g$ az összes $g \in G$ elem esetén,
(2) tetszőleges $g, h \in G$ elemekhez létezik olyan $\pi \in G\varphi$ permutáció, amelyre $g\pi = h$.

6.9. Feladat. (1) Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ nemtriviális, injektív, illetve szürjektív homomorfizmus?
(2) Adja meg az összes $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ homomorfizmust.

6.10. Feladat. Adjon meg két különböző n pozitív egészre olyan n-edfokú permutációcsoportot, amely izomorf D_4-gyel, és amelyben tetszőleges $k, l \in \{1, \ldots, n\}$-hez van olyan permutáció, amely k-t l-be viszi.

6.11. Feladat. Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(1) $\mathbb{Q}^+$ és $(\mathbb{Z}[x];+)$,
(2) $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}^+$.

6.12. Feladat. Milyen $m, n \geq 3$ egészekre tartalmaz S_m a $\mathbb{Z}_n$, illetve D_n csoporttal izomorf részcsoportot?

6.13. Feladat. Adjon meg olyan részcsoportot a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, mely izomorf az alábbi csoporttal:

(1) S_3,
(2) D_4,
(3) $\mathbb{C}^*$.

6.14. Feladat. Határozza meg a megadott G csoport H részcsoportja szerinti jobb, illetve bal oldali mellékosztályozást, és döntse el, hogy H normálosztó-e:

(1) $G = [a],\ H = [a^d]$, ahol $o(a) = n \in \mathbb{N},\ d \mid n$,
(2) $G = D_n,\ H = [at]$, ahol $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$,
(3) $G = D_{2n},\ H = [a^n]$, ahol $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,
(4) $G = S_4,\ H = V$,
(5) $G = S_4,\ H$ az $\{1, 2\}$ halmazt önmagába képező permutációk részcsoportja.

6.15. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $H, K \leq G$ olyan véges részcsoportok, amelyek rendje egymáshoz relatív prím, akkor $H \cap K = \{1\}$.

6.16. Feladat. (Megoldotta Endre) Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált normálosztóját:

(1) $G = S_4,\ A = \{(1\ 3)(2\ 4)\}$,
(2) $G = D_6,\ A = \{a\}$,
(3) $G = D_6,\ A = \{a^2\}$,
(4) $G = D_6,\ A = \{at\}$,
(5) $G = Q,\ A = \{i\}$.

6.17. Feladat. Határozza meg a D_6, Q és S_4 csoport összes normálosztóját és összes faktorcsoportját, és döntse el, hogy a faktorcsoportok közül melyek izomorfak, illetve melyek nem izomorfak egymással.

6.18. Feladat. Igazolja, hogy ha a G csoport K részhalmaza valamely részcsoport szerinti bal oldali mellékosztály, akkor G-nek van olyan részcsoportja is, amely szerint K jobb oldali mellékosztály.

6.19. Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden $2n$ rendű Abel-csoport, ahol n páratlan szám, pontosan egy másodrendű elemet tartalmaz.

6.20. Feladat. Izomorfia erejéig határozza meg az összes legfeljebb hatodrendű csoportot.

6.21. Feladat. (Megoldotta Péter) Mutassa meg, hogy az A_4 csoportban nincsen hatodrendű részcsoport.

6.22. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges G csoport esetén $\mathrm{Inn}G \triangleleft \mathrm{Aut}G$.

6.23. Feladat. Keressen (minél kisebb elemszámú) olyan G csoportot, amelyben vannak olyan M, N részcsoportok, amelyekre $M \triangleleft N$, $N \triangleleft G$, de M nem normálosztó G-ben.

6.24. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha a H részcsoport indexe a G csoportban 2, akkor $G \setminus H$ minden eleme páros rendű.

6.25. Feladat. Igazolja, hogy véges csoportban minden konjugáltsági osztály elemszáma osztja a csoport rendjét.

6.26. Feladat. Legyen G véges csoport, N pedig normálosztó G-ben. Jelölje G konjugáltsági relációjának N-re való megszorítását $\sim$, N konjugáltsági relációját pedig $\approx$. Bizonyítsa be, hogy $\approx \subseteq \sim$, és az egy $\sim$-osztályban lévő $\approx$-osztályok elemszáma azonos.

6.27. Feladat. Keresse meg a D_n $(n \geq 3)$ csoport összes valódi nemtriviális normálosztóját, és minden esetben határozza meg, hogy milyen „ismert” csoporttal izomorf a szerinte vett faktorcsoport.

7. Lineáris algebra, ortogonalizáció

7.1. Feladat. (Megoldotta Endre és Zsuzsanna) Igazoljuk, hogy tetszőleges euklideszi tér minden u és minden v vektorára

(1) $\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)$;
(2) $2\langle u, v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$;
(3) ha $\|u\| = \|v\|$, akkor $u - v \perp u + v$.

7.2. Feladat. (Megoldotta Péter) Hajtsuk végre a Gram-Scmidt-ortogonalizációt az alábbi lineárisan független vektorrendszereken!

(1) $(1,0,0), (2,3,0), (1,6,1)$,
(2) $(1,6,1), (1,0,0), (2,3,0)$,
(3) $(1,-1,1), (1,3,2), (4,4,-1)$,
(4) $(1,1,-1,1), (2,1,-1,0), (2,-1,3,2)$,
(5) $(1,1,-1,1), (0,3,0,1), (0,-3,0,7)$.

7.3. Feladat. Adjunk meg ortonormált bázist az alábbi alterek ortogonális kiegészítőjében.

(1) $[(1,1,-1),(1,2,1)] \leq \mathbb{R}^3$,
(2) $[(1,-1,1,1),(1,2,-1,1),(2,1,0,2)] \leq \mathbb{R}^4$,
(3) $[(1,-1,0,1),(1,2,-1,1)] \leq \mathbb{R}^4$,
(4) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$.

7.4. Feladat. Legyen A az $\mathbb{R}^3$ euklideszi tér φ lineáris transzformációjának mátrixa a kanonikus bázisban. Határozzuk meg a $v\varphi^*$ vektort.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $v = (1,2,2)$;

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $v = (-1, 1, 1)$.

7.5. Feladat. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak, illetve hamisak-e. Válaszunkat minden esetben indokoljuk!

(1) Minden ortogonális vektorrendszer lineárisan független.
(2) Ha két altér ortogonális, akkor az összegük direkt összeg.
(3) Önadjungált lineáris transzformáció mátrixa szimmetrikus.
(4) Ortogonális transzformáció valós sajátértékei 1 abszolút értékűek.
(5) Az ortogonális transzformációk éppen a bijektív lineáris transzformációk.
(6) Ortogonális transzformáció mátrixának determinánsa egy.

7.6. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Legyen a $\varphi_i \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A_i. Adjuk meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térnek egy, a φ_i sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát. (A_2 sajátértékei: $1, 4$)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.7. Feladat. Az előző feladatban szereplő $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixokhoz keressünk olyan B_i ortogonális mátrixokat, melyekre $B_i^{-1}A_iB_i$ diagonális.

7.8. Feladat. Hajtsunk végre főtengelytranszformációt az alábbi kvadratikus alakokon:

(1) $-4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$,
(2) $-2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

7.9. Feladat. (Megoldotta Péter) Egészítsük ki az $(1, -1, 1, 1)$ vektorrendszert olyan ortogonális rendszerré, melyben minden koordináta egész szám (minél egyszerűbben).

7.10. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden, legalább két dimenziós euklideszi térben végtelen sok ortonormált bázis van.

7.11. Feladat. Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely kettő lineárisan független, de semelyik kettő sem ortogonális.

Legyen V egy n-dimenziós euklideszi tér. Adjunk meg V-ben végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely n lineárisan független, de semelyik kettő sem ortogonális.

7.12. Feladat. (Megoldotta Zsuzsanna) Legyen V euklideszi tér, $U \leq V$ és $v \in V$. Mutassuk meg, hogy $U + v = \{u + v : u \in U\}$ pontosan egy U-ra merőleges elemet tartalmaz, és ez az elem éppen $U + v$ legrövidebb eleme.

7.13. Feladat. (Megoldotta Endre) Határozzuk meg a síkon az $y = x$ egyenesre való merőleges vetítés, illetve tükrözés adjungáltját.

7.14. Feladat. Legyen $\varphi \in L(V)$ lineáris transzformáció. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\text{Ker } \varphi^* = (\text{Im } \varphi)^\perp \text{ és } \text{Im } \varphi^* = (\text{Ker } \varphi)^\perp.$$

7.15. Feladat. Mutassuk meg, hogy euklideszi tér φ lineáris transzformációjára az alábbi feltételek bármelyike következik a másik kettőből. (Mely φ-k teljesítik mindhárom feltételt?)

(1) φ önadjungált,
(2) φ ortogonális,
(3) $\varphi^2 = \text{id}$.

7.16. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely $A \in \mathbb{R}_{3\times3}$ ortogonális mátrixhoz létezik olyan $P \in \mathbb{R}_{3\times3}$ és $B \in \mathbb{R}_{2\times2}$ ortogonális mátrix, amelyre

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

A lehetséges B mátrixok meghatározása után fogalmazzuk meg a fenti állítás geometriai jelentését.

7.17. Feladat. (Megoldotta Péter) Hány egész számokból álló 3×3-as ortogonális mátrix van?

7.18. Feladat. Legyenek φ, ψ lineáris transzformációk. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. (Amennyiben igazak, igazoljuk őket, amennyiben nem, adjunk rájuk ellenpéldát.)

(1) Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi + \psi$ is az.
(2) Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi\psi$ is az.
(3) Ha φ ortogonális, de ψ nem, akkor $\varphi\psi$ sem ortogonális.

8. Izomorfia és Normálosztók II.

A 6. feladatsorból három még meg nem beszélt feladat megoldása.

9. Gyűrűk

9.1. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges A Abel-csoport esetén A endomorfizmusainak (azaz önmagába menő homomorfizmusainak) halmaza gyűrűt alkot a következő összeadásra és a szokásos leképezésszorzásra nézve:

$$a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi \quad (a \in A).$$

Ez a gyűrű az A Abel-csoport *endomorfizmusgyűrűje.*

9.2. Feladat. Döntse el, hogy a megadott R gyűrűben az I halmaz részgyűrűt, illetve ideált alkot-e.

(1) $R = \mathbb{Z}$, I a páratlan egész számok halmaza,
(2) $R = \mathbb{Z}$, I a pozitív egész számok halmaza,

(3) $R = \mathbb{Z}[i],\ I = \mathbb{Z}$,
(4) $R = \mathbb{Z}[i],\ I = \{a + bi : a, b \in 2\mathbb{Z}\}$,
(5) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$,
(6) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(0) = 1\}$,
(7) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid f(0)\}$,
(8) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(0) \neq 1\}$.

9.3. Feladat. Döntse el az alábbi leképezésekről, hogy gyűrűhomomorfizmusok-e.

(1) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto 4k$,
(2) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2, \overline{k} \mapsto \overline{k}$,
(3) $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}, f \mapsto f(0)$,
(4) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_n, f \mapsto \overline{f(1)}$,
(5) $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, M \mapsto |M|$.

9.4. Feladat. Mutassa meg, hogy az alábbi gyűrűk nem izomorfak egymással:

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ és $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$,
(2) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$.

9.5. Feladat. A 3. Feladatban megadott R gyűrűk esetében, ahol a megadott I részhalmaz ideál, adja meg az R/I faktorgyűrű elemeit és műveleteit (művelettáblázattal vagy más módon).

9.6. Feladat. Adja meg a következő homomorfizmusok magját, és fogalmazza meg, mi adódik a homomorfiatétel alkalmazásával:

(1) a 4. Feladatbeli homomorfizmusok,
(2) $\varphi\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[y],\ f\varphi = f(2y)$,
(3) $\psi\colon \mathbb{Z}_2[x] \to {\mathbb{Z}_2}^{\mathbb{Z}_2}$, ahol $f\psi$ az f polinomhoz tartozó polinomfüggvény. (Itt ${\mathbb{Z}_2}^{\mathbb{Z}_2}$ az a gyűrű, amelynek alaphalmaza az összes $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ leképezésből áll, a műveletek pedig a pontonkénti összeadás és szorzás.)

9.7. Feladat. Bizonyítsa be az alábbi izomorfiákat:

(1) $\mathbb{Z}_n / \langle \overline{d} \rangle \cong \mathbb{Z}_d$, ha $d \mid n$,
(2) $\mathbb{Z}[x] / \langle n \rangle \cong \mathbb{Z}_n[x]$,
(3) $\mathbb{R}[x, y] / \langle x - y \rangle \cong \mathbb{R}[x]$.

9.8. Feladat. Döntse el a következő állításokról, hogy igazak-e. Állítását minden esetben igazolja.

(1) Zérógyűrű minden, az összeadásra és kivonásranézve zárt nemüres részhalmaza ideál.
(2) A legfeljebb 5-ödfokú polinomok halmaza részgyűrű $\mathbb{Z}[x]$-ben.
(3) A $\mathbb{Z}[i]$ gyűrűnek $\mathbb{Z}$ ideálja.
(4) Ha $\varphi\colon R \to T$ homomorfizmus az R és T gyűrűk között, akkor im φ ideál T-ben.

(5) Bármely $\varphi\colon \mathbb{Z} \to R$ homomorfizmust egyértelműen meghatározza 1φ.

9.9. Feladat. Legyen R olyan kommutatív, egységelemes gyűrű, melyben az egységelem additív rendje a p prímszám. Igazolja, hogy ekkor bármely $a, b \in R$ esetén

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

9.10. Feladat. Megadható-e a $\mathbb{Z}$ gyűrűben olyan részhalmaz, amely zárt az összeadásra és a kivonásra, azonban a szorzásra nem?

9.11. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben

(1) az $x-1$ polinom által generált részgyűrűt (azaz a legszűkebb olyan részgyűrűt, amely tartalmazza $x - 1$-et);
(2) az x és $x - 1$ polinom által generált részgyűrűt;
(3) az $x - 1$ polinom által generált ideált (azaz a legszűkebb olyan ideált, amely tartalmazza $x - 1$-et).

9.12. Feladat. Adjon meg két különböző valódi nemtriviális balideált és két különböző valódi nemtriviális jobbideált az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gyűrűben.

9.13. Feladat. Egy $(R; +, \cdot)$ egységelemes gyűrű alaphalmazán definiáljuk a következő műveleteket: $a \oplus b = a+b-1$ és $a \circ b = a+b-ab$ $(a, b \in R)$. Bizonyítsa be, hogy $(R; \oplus, \circ)$ is gyűrű, és izomorf az $(R; +, \cdot)$ gyűrűvel.

9.14. Feladat. Legyen A az R gyűrű tetszőleges részhalmaza. Igazolja, hogy az A halmaz által generált ideál (azaz az A-t tartalmazó legszűkebb ideál) megegyezik az $A \cup RA \cup AR \cup RAR$ halmaz által generált részgyűrűvel.

9.15. Feladat. Adjon meg olyan R gyűrűt és abban olyan nemtriviális S részgyűrűt, ahol R és S is egységelemes, de ez a két egységelem különböző.

9.16. Feladat. Milyen „ismert” gyűrűvel izomorf a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, illetve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ csoportok endomorfizmusgyűrűje?

9.17. Feladat. Tetszőleges p prímszám esetén igazolja, hogy

(1) bármely két p elemű zérógyűrű izomorf egymással, és
(2) minden p elemű gyűrű vagy zérógyűrű, vagy izomorf $\mathbb{Z}_p$-vel.

9.18. Feladat. Legyen R olyan végtelen gyűrű, amelynek additív csoportja ciklikus. Igazolja, hogy ha R nem zérógyűrű, akkor R a $d\mathbb{Z}$ $(d \in \mathbb{N})$ gyűrűk közül pontosan eggyel izomorf.

9.19. Feladat. Legyen R az $n \times n$-es felső triangulásis valós mátrixok halmaza, T pedig az alsó triangulárisoké.

(1) Igazolja, hogy R és T részgyűrűje $\mathbb{R}^{n\times n}$-nek, és ez a két részgyűrű anti-izomorf egymással, azaz létezik olyan $\varphi\colon R \to T$ bijekció, amelyre bármely $A, B \in R$ esetén $(A+B)\varphi = A\varphi + B\varphi$, valamint $(AB)\varphi = B\varphi \cdot A\varphi$.
(2) Izomorf-e R és T?

9.20. Feladat. Izomorf-e egymással a $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-1\rangle$, $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle$, illetve $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-4\rangle$ gyűrű?

9.21. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges p prímszám esetén az ${\mathbb{Z}_p}^{\mathbb{Z}_p}$ gyűrű (azaz az összes $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ leképezésből álló halmaz a pontonkénti összeadással és szorzással) izomorf a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrű valamely faktorgyűrűjével.

10. Jordan-normálalak

10.1. Feladat. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Adjunk meg bázist a v vektort tartalmazó legszűkebb invariáns altérben, valamint számítsuk ki a v vektor rendjét (a φ lineáris transzformációra vonatkozóan).

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v = (1, 2, -1)$;
(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (1, 1, 0)$;
(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (0, 1, 1)$;
(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (1, 2, 0, -1)$.

10.2. Feladat. Igazoljuk, hogy lineáris transzformáció sajátalterei invariáns alterek. Mutassuk meg, hogy invariáns alterek összege is invariáns altér.

10.3. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan $\mathbb{Q}$ feletti Jordan-mátrixot, amely

(1) 4×4-es és minimálpolinomja $(x+1)^2$,
(2) 6×6-os és minimálpolinomja $(x+2)^2(x-1)$,
(3) 7×7-es és minimálpolinomja $(x+1)^2(x-3)$,
(4) 6×6-os és karakterisztikus polinomja $(x^4-1)(x^2-1)$.

10.4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti Jordan-normálalakját:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.5. Feladat. Lehetnek-e egy valós mátrix invariáns faktorai a következõk? Ha igen, adjuk meg a mátrix Jordan-normálalakját.

(1) $1, 1, 1, (x-2)^2, (x-1)(x^2+x+1)$,
(2) $1, 1, (x-2), (x-2)(x-1)$,
(3) $1, 1, (x-1), (x-1)(x^2+2x-2)$,
(4) $1, (x-3), (x-3)^3, (x-3)^3(x^2+x+1)$,
(5) $1, 1, 1, 1, (x-\sqrt{2}), (x-\sqrt{2})^2, (x-\sqrt{2})^2(x^2-x+10)$.

10.6. Feladat. Döntsük el az alábbi kérdésekrõl, hogy igazak, illetve hamisak-e.

(1) Ha egy mátrix minimálpolinomja x^3, akkor determinánsa 0.
(2) Ha egy mátrix minimálpolinomja x^3-1, akkor sajátértéke az 1.
(3) Ha egy mátrix invariáns faktora az $(x-1)^3$, akkor nem diagonalizálható semilyen test felett sem.
(4) Ha egy mátrix elemi osztója az x^2, akkor nem diagonalizálható semilyen test felett sem.
(5) A $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix Jordan-normálalakú $\mathbb{Q}$ felett.
(6) A $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix Jordan-normálalakú $\mathbb{Q}$ felett.
(7) Bármely komplex mátrix Jordan-normálalakjában csak a fõátlóban, illetve közvetlenül a fõátló felett lehetnek nullától különbözõ elemek.
(8) Racionális mátrix Jordan-normálalakjában a fõátlótól tetszõlegesen messze lehetnek nullától különbözõ elemek.

10.7. Feladat. Adjunk meg olyan $\varphi\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineáris transzfromációt (határozzuk meg mátrixát a standard bázisban), amelyre a $v = (1,-1,1,0)$ vektort tartalmazó legszűkebb invariáns altér 3 dimenziós.

10.8. Feladat. (1) Igazoljuk, hogy ha $v \in V$ és $\varphi \in \hom(V,V)$, akkor az $\{u \in \langle v \rangle \mid u\varphi = u\}$ altér legfeljebb egy dimenziós.
(2) Adjunk példát olyan v vektorra és φ lineáris transzformációra, amelyre nézve a fenti altér egy illetve nulla dimenziós.

10.9. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok $\mathbb{C}$ feletti Jordan-normálalakját:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ a_{2n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{2n-1} & \cdots & b_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \cdots & 0 & b_{2n} \end{pmatrix}.$$

10.10. Feladat. Tekintsünk tetszõleges $A \in K^{m\times m}$ és $B \in K^{n\times n}$ mátrixokat.

(1) Igazoljuk, hogy ha A és B Jordan-normálalakja rendre M és N, akkor az $(m+n)\times(m+n)$ típusú
$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
mátrix Jordan-normálalakja
$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

(2) Hogyan kapható meg a C mátrix minimálpolinomja az A és B mátrixok minimálpolinomjából?

10.11. Feladat. Igazoljuk, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához.

10.12. Feladat. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $\alpha \in \mathbb{C}$.

(1) Mutassuk meg, hogy ha az A mátrix Jordan-normálalakja M, akkor az $A + \alpha E$ mátrixé $M + \alpha E$.

(2) Határozzuk meg az elõzõ észrevétel alkalmazásával az alábbi mátrix Jordan-normálalakját:
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

10.13. Feladat. Lássuk be, hogy tetszõleges $A, B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrixokra ekvivalens az alábbi két feltétel:

(1) Létezik olyan $Q \in \mathbb{Q}$ mátrix, amelyre: $Q^{-1}AQ = B$.
(2) Létezik olyan $C \in \mathbb{C}$ mátrix, amelyre: $C^{-1}AC = B$.

10.14. Feladat. Legyen K tetszõleges test és $A \in K^{n\times n}$ pedig olyan mátrix, amelyre

(1) $A^2 = A$;
(2) $A^2 = E$.

Határozzuk meg A Jordan-normálalakját. Ez alapján adjuk meg az A-hoz tartozó lineáris transzformációk „geometriai” jelentését.

10.15. Feladat. Legyen K tetszõleges test és $A \in K^{n\times n}$ pedig olyan mátrix, amelynek valamely hatványa a 0 mátrix.

(1) Igazoljuk, hogy ekkor $A^n = 0$.
(2) Határozzuk meg A Jordan-normálalakját.

10.16. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix valamely hatványa az egységmátrix, akkor A hasonló egy diagonális mátrixhoz, melynek fõátlójában egységgyökök állnak.