MBN212G: KLASSZIKUS ALGEBRA GYAKORLAT (2014. ÁPRILIS 29.)

Figyelem, mindenki a vezetéknevétől függően csak olyan feladatot oldhat meg, amelynek (második) sorszáma modulo 3 megegyezik az alábbi táblazatbeli értékkel:

A–Gy:	1,
H–P:	2,
S–T:	3.

Hetente maximum két feladatot lehet beadni írásban, amelyet utólag pótólni nem lehet.

1. Komplex számok

1.1. Feladat. (1 pt.)
Ábrázolja a következő komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és adja meg a trigonometrikus, illetve kanonikus alakjukat.

(1) $\frac{7}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}i$,
(2) $-2 - 2i$,
(3) $\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$,
(4) $2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.

1.2. Feladat. (1 pt.)
Milyen mértani alakzatot határoznak meg a Gauss-számsíkon azon komplex számok,

(1) melyek abszolút értéke 2,
(2) melyek argumentuma $\pi/6$?

1.3. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg két komplex szám egymáshoz viszonyított helyzetét a Gauss-számsíkon, ha

(1) szorzatuk valós,
(2) összegük valós,
(3) hányadosuk valós,
(4) különbségük valós.

1.4. Feladat. (1 pt.)
Adja meg a következő komplex számokat a kanonikus és trigonometrikus alakban: $(1+i)^3$, $(1+\sqrt{3}i)^{100}$, $i/(1-i)$, $(3+i)/(1-i)$, $(3+4i)^{-1}$, $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{77}$, $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{20}$.

1.5. Feladat. (1 pt.)
Végezze el az alábbi gyökvonásokat:

(1) $\sqrt{3-4i}$,
(2) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

1.6. Feladat. (2 pt.)
Fejezze ki $\sin 4\varphi$ és $\cos 5\varphi$ értékét $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ segítségével.

1.7. Feladat. (2 pt.)
Bizonyítsa, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} \sin(jx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

1.8. Feladat. (1 pt.)
Keresse meg az alábbi egyenletek összes megoldását:

(1) $z^2 = \bar{z}$
(2) $z^3 = -8$,
(3) $z^6 = 64$,

(4) $z^2 + 2iz = -i$.

1.9. Feladat. (2 pt.)
Tetszőleges $n \geq 1$ esetére számolja ki az n-edik egységgyökök összegét és szorzatát.

1.10. Feladat. (2 pt.)
Jelölje E_n az n-edik egységgyökök halmazát. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $n, m \geq 1$ egészekre $E_n \cap E_m = E_{\mathrm{lnko}(n,m)}$.

1.11. Feladat. (2 pt.)
Jelölje P_n az n-edik primitív egységgyökök halmazát. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $n, m \geq 1$ egészekre ha $\varepsilon \in P_n$, akkor $\varepsilon^m \in P_{\frac{n}{\mathrm{lnko}(n,m)}}$.

1.12. Feladat. (2 pt.)
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $n \geq 1$ egészre $E_n = \bigcup_{d|n} P_d$, és azt, hogy az únió diszjunkt.

1.13. Feladat. (2 pt.)
Tetszőleges $n \geq 1$ esetére számolja ki az n-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.

1.14. Feladat. (1 pt.)
Mely ε egységgyökre lesz $1 + \varepsilon$ is egységgyök?

1.15. Feladat. (1 pt.)
Oldja meg a $(2 + i)x^2 + (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

1.16. Feladat. (1 pt.)
Ábrázolja a komplex számsíkon az $|\bar{z}i| \leq 1$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

1.17. Feladat. (1 pt.)
Ábrázolja a komplex számsíkon a $0 \leq \arg(z + i) < \pi/3$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

1.18. Feladat. (1 pt.)
Ábrázolja a komplex számsíkon az $\mathrm{Im}\,(\bar{z}(1 + i)) \geq 1$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

1.19. Feladat. (1 pt.)
Ábrázolja a komplex számsíkon a $\mathrm{Re}\left(z^2\right) \leq 1$ egyenlőtlenséget kielégítő z komplex számok halmazát.

2. Algebrai struktúrák

2.1. Feladat. (1 pt.)
Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z},\ a \text{ páros}\}$$

2.2. Feladat. (1 pt.)
Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\big) = \big\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\big\}$$

2.3. Feladat. (1 pt.)
Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e az alábbi halmaz (a szokásos összeadással és szorzással)?

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2.4. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy tetszőleges nemüres $S \subseteq \mathbb{R}$ esetén ekvivalens az alábbi két feltétel.

(1) $\forall a, b \in S : a + b \in S$ és $-a \in S$
(2) $\forall a, b \in S : a - b \in S$

2.5. Feladat. (2 pt.)
Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd a 2.3. feladatot).

2.6. Feladat. (2 pt.)
Keressen egy ± 1-től különböző egységet a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gyűrűben, majd ennek segítségével konstruáljon meg végtelen sok egységet.

2.7. Feladat. (2 pt.)
Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

2.8. Feladat. (2 pt.)
Definiáljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \odot b = a + b - ab$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.

2.9. Feladat. (2 pt.)
Legyenek a és b pozitív egész számok. Mutassa meg, hogy ha a-t b-vel osztva a maradék r, akkor $(x^a - 1)$-et $\left(x^b - 1\right)$-gyel osztva $x^r - 1$ lesz a maradék. Ezen megfigyelés segítségével bizonyítsa be, hogy $x^a - 1$ és $x^b - 1$ legnagyobb közös osztója $x^{(a,b)} - 1$ (mondjuk az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben).

2.10. Feladat. (1 pt.)
Számítsa ki a $\mathbb{Z}_{13}$ testben a $\overline{8}+\overline{11}$, $\overline{8}-\overline{11}$, $\overline{8}\cdot\overline{11}$, $\overline{11}/\overline{8}$, $\overline{8}^{11}$, $\overline{11}^{8}$ elemeket. (Az eredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{12}$ valamelyike legyen.)

2.11. Feladat. (1 pt.)
Számítsa ki a $\mathbb{Z}_{11}$ testben a $\overline{8}+\overline{5}$, $\overline{8}-\overline{5}$, $\overline{8}\cdot\overline{5}$, $\overline{5}/\overline{8}$, $\overline{8}^{5}$, $\overline{5}^{8}$ elemeket. (Az eredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{10}$ valamelyike legyen.)

2.12. Feladat. (1 pt.)
Számítsa ki a $\mathbb{Z}_7$ testben a $\overline{3}+\overline{5}$, $\overline{3}-\overline{5}$, $\overline{3}\cdot\overline{5}$, $\overline{5}/\overline{3}$, $\overline{3}^{5}$, $\overline{5}^{3}$ elemeket. (Az eredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{6}$ valamelyike legyen.)

2.13. Feladat. (1 pt.)
Keresse meg az $x^3 = \overline{1}$ egyenlet összes megoldását a $\mathbb{Z}_3$, illetve a $\mathbb{Z}_5$ testben.

2.14. Feladat. (1 pt.)
Keresse meg az $x^3 = \overline{2}$ egyenlet összes megoldását a $\mathbb{Z}_5$, illetve a $\mathbb{Z}_7$ testben.

2.15. Feladat. (1 pt.)
Keresse meg az $x^3 = \overline{3}$ egyenlet összes megoldását a $\mathbb{Z}_7$, illetve a $\mathbb{Z}_{11}$ testben.

2.16. Feladat. (1 pt.)
Végezzen maradékos osztást az $f = x^3 + \overline{1}$, $g = \overline{2}x^2 - \overline{3}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomokon.

2.17. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az $f = x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1}$, $g = x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu + gv = (f, g)$ egyenlet egy megoldását.

2.18. Feladat. (1 pt.)
Számítsa ki az $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$ polinomok legnagyobb közös osztóját, majd ennek segítségével határozza meg f és g közös gyökeit, és végül külön-külön f és g összes gyökét.

3. Integritástartományok

3.1. Feladat. (1 pt.)
Oldja meg az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben az $x^2 \cdot f \equiv x^2 - 2x \pmod{x^3 + x}$ kongruenciát. (Figyelem: nem x az ismeretlen, hanem f!)

3.2. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a $8 + i$ és $4 - 2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

3.3. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a 2 és $3 + 3i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

3.4. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a $4-2i$ és $2-2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

3.5. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben.

$$I=\{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]:a_0 \text{ páros}\}.$$

3.6. Feladat. (1 pt.)
Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

3.7. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy az alábbi I halmaz ideál a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ gyűrűben.

$$I=\left\{a+b\sqrt{-5}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]:a\equiv b \pmod 2\right\}.$$

3.8. Feladat. (1 pt.)
Mutassa meg, hogy az előző feladatbeli ideál nem főideál.

3.9. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az egész számok gyűrűjében az $I=(18)\cap(30)$ ideált. (Mivel $\mathbb{Z}$ főideálgyűrű, van olyan g egész szám, amelyre $I=(g)$. Ezt a g generátort kell megtalálni.) Hogyan lehetne általánosítani?

3.10. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges z komplex számra az

$$I=\left\{k\in\mathbb{Z}:z^k=1\right\}$$

halmaz ideál az egész számok gyűrűjében, továbbá amennyiben z primitív n-edik egységgyök, akkor $I=(n)$.

3.11. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges α komplex számra az alábbi halmaz ideál a $\mathbb{C}[x]$ gyűrűben és adja meg egy generátorelemét.

$$I=\{f\in\mathbb{C}[x]:f(\alpha)=0\}.$$

3.12. Feladat. (1 pt.)
Ellenőrizze, hogy a korlátos valós számsorozatok gyűrűt alkotnak (a szokásos tagonkénti összeadással és szorzással), majd mutassa meg, hogy a nullához konvergáló sorozatok ideált alkotnak ebben a gyűrűben.

3.13. Feladat. (1 pt.)
Írja fel a $\mathbb{Z}_2[x]/\left(x^2+x+1\right)$ négyelemű test összeadó- és szorzótábláját.

3.14. Feladat. (1 pt.)
Írja fel a $\mathbb{Z}_2[x]/\left(x^3+x+1\right)$ nyolcelemű test összeadó- és szorzótábláját.

3.15. Feladat. (1 pt.)
Írja fel a $\mathbb{Z}_3[x]/\left(x^2+1\right)$ kilencelemű test összeadó- és szorzótábláját.

3.16. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\left(x^2+1\right)$ kilencelemű testben az $a\cdot b$, a/b, b/a elemeket, ahol $a=\overline{x}$ és $b=\overline{x+1}$.

3.17. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\left(x^2+1\right)$ kilencelemű testben az $a\cdot b$, a/b, b/a elemeket, ahol $a=\overline{2x}$ és $b=\overline{x+2}$.

3.18. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a $\mathbb{Z}_5[x]/\left(x^3+1\right)$ százhuszonötelemű testben a $\overline{2x^2-3x+2}$ elem reciprokát.

4. Test feletti polinomgyűrűk

4.1. Feladat. (1 pt.)
Végezze el az alábbi maradékos osztást a megadott polinomgyűrűben:

(1) $\mathbb{R}[x]$-ben $(x^4 - 10x^2 + 1) : (x^2 - 2\sqrt{2}x - 1)$,
(2) $\mathbb{Z}_5[x]$-ben $(x^5 + \overline{2}x^4 - x^2 - x + \overline{1}) : (\overline{2}x^3 - x - \overline{1})$,
(3) $\mathbb{Z}_7[x]$-ben $(\overline{3}x^5 - x^3 - \overline{2}x^2 + x - \overline{1}) : (x^3 - \overline{2}x^2 + x - \overline{1})$.

4.2. Feladat. (1 pt.)
Végezze el az alábbi maradékos osztást a megadott polinomgyűrűben:

(1) $\mathbb{C}[x]$-ben $(x^3 - 2) : (x^2 + ix - 1)$,
(2) $\mathbb{Z}_3[x]$-ben $(x^5 + x^4 + x^2 + x) : (x^4 + x^2 + \overline{1})$,
(3) $\mathbb{Z}_5[x]$-ben $(x^5 + x^4 + x^2 + x) : (x^4 + x^2 + \overline{1})$,

4.3. Feladat. (1 pt.)
Végezze el az alábbi maradékos osztást a megadott polinomgyűrűben:

(1) $\mathbb{R}[x]$-ben $(x^5 - 5x^3 + 5x + 1) : (3x^3 - 2x + 1)$,
(2) $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^5 - 5x^3 + 5x + 1) : (3x^3 - 2x + 1)$,
(3) $\mathbb{Z}_2[x]$-ben $(x^5 + x^4 + x^2 + x) : (x^4 + x^2 + \overline{1})$,

4.4. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét a megadott polinomgyűrűben:

(1) $x^5 - 5x^3 + 5x + 1, 3x^3 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
(2) $x^4 + \overline{1}, x^3 - x \in \mathbb{Z}_3[x]$,

4.5. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét a megadott polinomgyűrűben:

(1) $x^4 - 10x^2 + 1, x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 \in \mathbb{R}[x]$,
(2) $x^4 + x^3 + \overline{2}x^2 - \overline{2}x + \overline{2}, x^4 - x^2 - \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

4.6. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét a megadott polinomgyűrűben:

(1) $ix^3 - 1, x^5 - x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{C}[x]$,
(2) $x^4 + x^2 + \overline{1}, x^5 + x^4 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$,

4.7. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az R polinomgyűrűben a megadott polinomegyenlet összes (u, v) megoldását, valamint azt a megoldást, ahol u a lehető legkisebb fokú.

(1) $R = \mathbb{R}[x]$: $(x^5 - 3x^4 + 2x^2)u + (2x^4 - x^3)v = x$;
(2) $R = \mathbb{Z}_2[x]$: $(x^4 + x^2 + \overline{1})u + (x^5 + x^4 + x^2 + x)v = x^4 + x^3 + x^2$;

4.8. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az R polinomgyűrűben a megadott polinomegyenlet összes (u, v) megoldását, valamint azt a megoldást, ahol u a lehető legkisebb fokú.

(1) $R = \mathbb{Q}[x]$: $(x^4 + 2x^3 + x + 1)u + (x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1)v = x^3 - 2x$;
(2) $R = \mathbb{Z}_5[x]$: $(x^3 + x^2 + \overline{2}x - \overline{2})u + (x^3 - \overline{2}x^2 - x - \overline{1})v = x^2 + \overline{1}$;

4.9. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az R polinomgyűrűben a megadott polinomegyenlet összes (u, v) megoldását, valamint azt a megoldást, ahol u a lehető legkisebb fokú.

(1) $R = \mathbb{C}[x]$: $(x - i)u + (x^2 + 1)v = x^3 + i$;
(2) $R = \mathbb{Z}_7[x]$: $(x^3 + \overline{3}x^2 - \overline{3}x - \overline{1})u + (x^4 + x^2 + \overline{3})v = x^4$.

4.10. Feladat. (2 pt.)
Legyenek adottak az alábbi polinomok:

$$\begin{aligned} f &= x^6+2x^5-2x^4+2x^3+12x^2-2x-4 \in \mathbb{R}[x], \\ g &= x^3+3x+2i \in \mathbb{C}[x], \\ u &= x^3+x^2+x+\overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x], \\ v &= x^4-x^3-x^2+x \in \mathbb{Z}_3[x], \\ w &= x^5+x^4+x^3+x^2+x+\overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x], \\ z &= x^3+\overline{2}x^2-\overline{3} \in \mathbb{Z}_7[x]. \end{aligned}$$

Horner-elrendezés alkalmazásával

(1) számolja ki az $f(-1), g(2i), v(-\overline{1}), w(\overline{2}), z(-\overline{3})$ helyettesítési értékeket;
(2) döntse el, hogy gyöke-e, és ha igen, akkor hányszoros gyöke f-nek -2, g-nek $-i$, u-nak $\overline{1}$, v-nek $\overline{1}$, w-nek $-\overline{2}$ és z-nek $\overline{3}$;
(3) végezze el az $f:(x+1)$, $g:(x-1)$, $u:(x+\overline{1})$, $v:(x-\overline{1})$, $w:(x-\overline{2})$ és a $z:(x+\overline{2})$ maradékos osztást.

4.11. Feladat. (2 pt.)
Adja meg elempárok halmazaként az előző feladatbeli u, v, w, z, valamint a következő polinomokhoz tartozó polinomfüggvényeket:

$$\begin{aligned} f &= x^5+x^3+\overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x], \\ g &= -x^4-x^3+x+\overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x], \\ h &= x^6+x^4+x^3+\overline{2}x+\overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x], \\ p &= x^7+\overline{2}x^4-\overline{3}x+\overline{2} \in \mathbb{Z}_7[x]. \end{aligned}$$

Döntse el, hogy vannak-e közöttük azonosak.

4.12. Feladat. (2 pt.)
Határozza meg azt a legkisebb fokú $\mathbb{Z}_7$-beli polinomot, amely $\overline{2}x$-et ad maradékul $(x-\overline{1})^2$-nel osztva, és $\overline{3}x$-et ad maradékul $(x-\overline{2})^3$-nel osztva.

4.13. Feladat. (2 pt.)
Legyen K tetszőleges test, $f, g, u, v \in K[x]$ tetszőleges polinomok, és jelölje d az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját $K[x]$-ben. Határozza meg az u és v polinomok legnagyobb közös osztóját $K[x]$-ben, ha tudjuk, hogy $fu+gv=d$.

4.14. Feladat. (2 pt.)
Legyen K, L két test, melyre $K \subseteq L$, és legyen $f, g \in K[x]$. Ekkor persze $f, g \in L[x]$ is fennáll. Igazolja, hogy

(1) $f \mid g$ pontosan akkor teljes $K[x]$-ben, ha $L[x]$-ben teljesül,
(2) az f és g polinomnak ugyanaz a legnagyobb közös osztója, illetve legkisebb közös többszöröse $K[x]$-ben, mint $L[x]$-ben,
(3) bármely $h \in K[x]$ és $u, v \in L[x]$ polinomok esetén, ha $fu+gv=h$, akkor $u, v \in K[x]$, és így az $fu+gv=h$ egyenletnek ugyanazok a polinompárok a megoldásai $K[x]$-ben, mint $L[x]$-ben.

4.15. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy $x^d-1 \mid x^n-1$ teljesül $\mathbb{Q}[x]$-ben, ha $d, n \in \mathbb{N}$-re $d \mid n$.

4.16. Feladat. (2 pt.)
Mely a, b valós, illetve $\mathbb{Z}_p$-beli (p prímszám) együtthatók esetén teljesül $(x-1)^2 \mid ax^{n+1}+bx^n+1$?

4.17. Feladat. (2 pt.)
Legyen p prímszám és f, g két polinom $\mathbb{Z}_p$ felett. Igazolja, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ polinomfüggvények pontosan akkor azonosak, ha

$$x(x-\overline{1})(x-\overline{2})\cdots(x-\overline{p-1}) \mid f-g.$$

4.18. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszámra $\mathbb{Z}_p[x]$-ben fennáll az

$$x^p-x = x(x-\overline{1})(x-\overline{2})\cdots(x-\overline{p-1})$$

egyenlőség.

4.19. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az alábbi valós együtthatós polinomok irreducibilis felbontását a komplex, illetve a valós számtest fölött:

(1) $x^3 - 1$,
(2) $x^6 - x^3 + 1$.

4.20. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az alábbi valós együtthatós polinomok irreducibilis felbontását a komplex, illetve a valós számtest fölött:

(1) $x^4 - 1$,
(2) $x^4 + x^2 + 1$,

4.21. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az alábbi valós együtthatós polinomok irreducibilis felbontását a komplex, illetve a valós számtest fölött:

(1) $x^3 + 1$,
(2) $x^4 + 1$,

4.22. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg

(1) harmadfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_5$ fölött,
(2) negyedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_3$ fölött.

4.23. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg

(1) harmadfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_7$ fölött,
(2) negyedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_5$ fölött.

4.24. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg

(1) harmadfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_1 1$ fölött,
(2) ötödfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$ fölött.

4.25. Feladat. (2 pt.)
Döntse el, hogy irreducibilis-e az alábbi polinom a megadott polinomgyűrűben:

(1) $x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
(2) $x^4 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
(3) $x^4 + x^3 + x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
(4) $x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$,
(5) $x^5 - \overline{2}x^3 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

4.26. Feladat. (2 pt.)
Adja meg az alábbi valós együtthatós polinomok irreducibilis felbontását a komplex, illetve a valós számtest fölött:

(1) $x^n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$,
(2) $x^{2n} - x^n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

4.27. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben pontosan akkor teljesül $x^2 + x + 1 \mid x^{2k} + x^k + 1$ oszthatóság, ha $3 \nmid k$.

5. Polinomok II.

5.1. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy ha T test, akkor minden nem konstans $f \in T[x]$ polinom minden $c \in T$ értéket csak véges sok T-beli helyen vehet föl.

5.2. Feladat. (2 pt.)
Mely m pozitív egészekre van $\mathbb{Z}_m[x]$-ben olyan nemnulla polinom, hogy gyökeinek száma nagyobb, mint foka?

5.3. Feladat. (2 pt.)
Hány darab valós együtthatós irreducibilis polinom szorzatára bomlik fel az $x^{2007} + 2007x + 2007$ polinom?

5.4. Feladat. (2 pt.)
Legyen T tetszőleges test. Mutassa meg, hogy $a_n x^n + \dots a_1 x + a_0 \in T[x]$ ahol $a_n, a_0 \neq 0$ akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0 x^n + \dots a_{n-1} x + a_n$ is az.

5.5. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg olyan f legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, és $f(-1) = 0$.

5.6. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg olyan f legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomot, amelyre $f(2) = 0$, $f(-1) = 1$, és $f(0) = 1$.

5.7. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg olyan f legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomot, amelyre $f(1) = -1$, $f(2) = 0$, és $f(-1) = 2$.

5.8. Feladat. (1 pt.)
Létezik-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?

5.9. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy a következő polinomok irreducibilisek-e:

(1) $3x - 2 \in \mathbb{C}[x]$,
(2) $3x^2 + 2x + 10 \in \mathbb{R}[x]$,
(3) $x^5 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.

5.10. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy a következő polinomok irreducibilisek-e:

(1) $3x^2 + 2x + 10 \in \mathbb{C}[x]$,
(2) $2x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
(3) $x^6 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.

5.11. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy a következő polinomok irreducibilisek-e:

(1) $2x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{R}[x]$,
(2) $3x^2 + 2x + 10 \in \mathbb{Q}[x]$,
(3) $x^4 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,

5.12. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását a komplex, valós és racionális számok teste felett:

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

5.13. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását a komplex, valós és racionális számok teste felett:

(1) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,

5.14. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását a komplex, valós és racionális számok teste felett:

(1) $x^4 - 10x^2 + 1$.

5.15. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és prímhatványtényezős alakját $\mathbb{Q}[x]$-ben:

(1) $f = x^3 - x^2 - x - 2$,

(2) $f = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$,

5.16. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és prímhatványtényezős alakját $\mathbb{Q}[x]$-ben:

(1) $f = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$,
(2) $f = x^4 - x^3 + 2x + 1$,

5.17. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és prímhatványtényezős alakját $\mathbb{Q}[x]$-ben:

(1) $f = x^3 - x^2 - x - 2$,
(2) $f = 5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$.

5.18. Feladat. (2 pt.)
Keressen olyan $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, hogy

(1) f' minden gyöke gyöke f-nek,
(2) f'-nek van olyan gyöke amely gyöke f-nek, és olyan is, amely nem gyöke f-nek.

5.19. Feladat. (2 pt.)
Igaz-e tetszőleges K test, $a \in K$ és $f \in K[x]$ esetén, hogy

(1) ha a többszörös gyöke f-nek, akkor a gyöke f'-nek,
(2) ha a k-szoros gyöke f-nek, akkor a $(k-1)$-szeres gyöke f'-nek?

5.20. Feladat. (2 pt.)
Tekintsük $f = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 \in \mathbb{C}[x]$ polinomot. A gyökök meghatározása nélkül adjon meg olyan $g \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelynek minden gyöke egyszeres, és ugyanazok a gyökei, mint f-nek.

5.21. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ komplex együtthatós polinom többszörös gyökeit.

5.22. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$ komplex együtthatós polinom többszörös gyökeit.

5.23. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az $x^6 - 5x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 12x + 4$ komplex együtthatós polinom többszörös gyökeit.

5.24. Feladat. (2 pt.)
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges p prímszámra és $c \in \mathbb{Z}_p$ konstansra az $x^p + c \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom nem irreducibilis.

5.25. Feladat. (2 pt.)
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges p prímszámra $f_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Adja meg $\bar{f}_p$ irreducibilis felbontását $\mathbb{Z}_p$ felett.

5.26. Feladat. (2 pt.)
Tetszőleges p prímszám esetén adja meg az összes irreducibilis másodfokú polinom számát $\mathbb{Z}_p[x]$-ben.

5.27. Feladat. (2 pt.)
Keresse meg az összes olyan p prímszámot, amelyre az $x + \bar{2}$ polinom faktora az $x^4 + x^3 + x^2 - x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak.

5.28. Feladat. (2 pt.)
Bizonyítsa be, hogy különböző $\mathbb{Q}[x]$-beli irreducibilis polinomoknak különböző komplex gyökei vannak. Ennek felhasználásával mutassa meg, hogy tetszőleges $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomra

(1) ha $a + b\sqrt{2}$ gyöke f-nek ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, akkor $a - b\sqrt{2}$ is az,
(2) ha $\sqrt[3]{24}$ gyöke f-nek, akkor $-\sqrt[3]{3} + \sqrt[6]{3^5}i$ is az.

5.29. Feladat. (1 pt.)
Oldja meg az $x^3 - 6x + 4 = 0$ harmadfokú egyenleteket a komplex számok halmazán.

5.30. Feladat. (1 pt.)
Oldja meg az $x^3 + 9x - 26 = 0$ harmadfokú egyenleteket a komplex számok halmazán.

5.31. Feladat. (1 pt.)
Oldja meg az $x^3 - 9x^2 + 18x + 28 = 0$ harmadfokú egyenleteket a komplex számok halmazán.

6. Többhatározatlanú és szimmetrikus polinomok

6.1. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)^2 \in (\mathbb{Q}[x_1, x_2])[x_3]$ polinom fokszámát, majd írja le x_3 és x_3^2 együtthatóját.

6.2. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az $(x_1 - 2x_3)^2(x_2 - 3x_3) \in (\mathbb{Q}[x_1, x_2])[x_3]$ polinom fokszámát, majd írja le x_3 és x_3^2 együtthatóját.

6.3. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \in (\mathbb{Q}[x_1, x_2])[x_3]$ polinom fokszámát, majd írja le x_3 és x_3^2 együtthatóját.

6.4. Feladat. (1 pt.)
Keressünk olyan szimmetrikus $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot, melynek lexikografikusan első monomja $2x_1^2x_2$.

6.5. Feladat. (1 pt.)
Keressünk olyan szimmetrikus $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot, melynek lexikografikusan első monomja $x_1^2x_2^2x_3$.

6.6. Feladat. (1 pt.)
Keressünk olyan szimmetrikus $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot, melynek lexikografikusan első monomja $x_1x_2^2x_3^3$.

6.7. Feladat. (1 pt.)
A $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinomgyűrűben írja le a $\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_3$ szimmetrikus polinomot monomjai lexikografikus rendezésében.

6.8. Feladat. (1 pt.)
A $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinomgyűrűben írja le a $\sigma_2^2\sigma_3 + \sigma_1$ szimmetrikus polinomot monomjai lexikografikus rendezésében.

6.9. Feladat. (1 pt.)
A $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinomgyűrűben írja le a $\sigma_3^2\sigma_1 + \sigma_2$ szimmetrikus polinomot monomjai lexikografikus rendezésében.

6.10. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$ szimmetrikus polinomot elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

6.11. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$ szimmetrikus polinomot elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

6.12. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az $x_1^3x_2x_3 + x_2^3x_1x_3 + x_3^3x_1x_2$ szimmetrikus polinomot elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

6.13. Feladat. (1 pt.)
Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg a $3x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.

6.14. Feladat. (1 pt.)
Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.

6.15. Feladat. (1 pt.)
Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg a $-x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.