MBN411G: ABSZTRAKT ALGEBRA GYAKORLAT

Ismétlés

Döntse el, és a megadott állítás előtt lévő körbe tett I, illetve H betűvel jelezze, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

○ (1) Ha $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a leképezés, amelyre

$$x\varphi = \begin{cases} 4x+1 & \text{ha } x \geq 0, \\ x & \text{különben}, \end{cases}$$

$$x\psi = \begin{cases} 3x & \text{ha } x \geq 0, \\ x+3 & \text{különben}, \end{cases}$$

akkor a $\varphi\psi$ leképezés bijektív.

○ (2) $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{99} = 2^{50}i$.

○ (3) Az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az $(1,2,3)$ vektor előáll a $(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

○ (4) A komplex számtestben mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben a $\{\sqrt{2}, \varepsilon, i\}$ vektorrendszer lineárisan független minden ε primitív 2012-edik egységgyök esetén.

○ (5) Ha egy vektortérben van 4-elemű lineárisan független vektorrendszer és van 6-elemű generátorrendszer, akkor a vektortér 5-dimenziós.

○ (6) Ha egy $n \times n$-es valós A mátrix determinánsa 0, akkor A rangja n.

○ (7) Ha egy véges dimenziós vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa nemelfajuló, akkor φ bijektív.

○ (8) Ha $1+i$ gyöke a valós együtthatós f polinomnak, akkor $x^2 - 2x + 2 \mid f$.

○ (9) Tetszőleges $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $c \in \mathbb{C}$ szám akkor és csak akkor többszörös gyöke, ha $f'(c) = 0$.

○ (10) Az $x^3 - 3x^2 + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben.

○ (11) Az $x^3 - 3x^2 + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

○ (12) A $3x^8 - 18x^4 + 666x^2 - 36$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

○ (13) Az $x^4 + x - \bar{1}$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_3[x]$-ben.

○ (14) A $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ integritástartományban 3 prímelem.

○ (15) A $\mathbb{Z}[i]$ integritástartományban $2 - 3i$ irreducibilis, de nem prímelem.

Mintafeladatok az első zárthelyi dolgozathoz

1. Feladat. Döntse el, és a megadott állítás előtt lévő körbe tett I, illetve H betűvel jelezze, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak. Választását minden esetben egy-egy mondattal indokolja.

◯ Ha egy véges dimenziós vektortér valamely lineáris transzformációja nem injektív, akkor nem lehet szürjektív sem.

◯ Az $1+i$ komplex szám harmadik gyöke a $-1+i$ komplex számnak.

◯ A $6x^6+x^{12}-12$ polinom irreducibilis a racionális számtest felett.

2. Feladat. Tudjuk (nem kell ellenőrizni!), hogy a síkon (azaz az $\mathbb{R}^2$ vektortéren) az origó körüli $\frac{\pi}{2}$ szögű forgatás lineáris transzformáció. Adja meg ennek a mátrixát a standard bázisban.