Lineáris leképezések

(előadásvázlat, 2012. szeptember 28.)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: homogén lineáris egyenletrendszer és annak megoldásaltere, vektorterek izomorfizmusa és automorfizmusa, bázisátmenet mátrixa.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.
- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.

1. Definíció. Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. A $\varphi : U \to V$ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük (vagy vektortér homomorfizmusnak), ha bármely $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén

$$(u+v)\varphi = u\varphi + v\varphi \quad \text{és} \quad (\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi).$$

Az U-ból V-be menő lineáris leképezések halmazát $\mathrm{Hom}(U,V)$ jelöli. Az U-ból U-ba menő lineáris leképezéseket lineáris transzformációknak nevezzük. A bijektív lineáris leképezések a vektortér izomorfizmusok, továbbá a bijektív lineáris transzformációk a vektortér automorfizmusok.

2. Definíció. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezés. A

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\, u \in U : u\varphi = 0 \,\},$$
$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\, u\varphi : u \in U \,\}$$

halmazokat rendre a φ lineáris leképezés magjának, illetve képterének nevezzük.

3. Tétel. *Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. Tetszőleges $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezésre érvényesek a következők:*

(1) $0\varphi = 0$,
(2) $\mathrm{Ker}\,\varphi$ *altér U-ban,*
(3) $\mathrm{Im}\,\varphi$ *altér V-ben,*
(4) φ *akkor és csak akkor injektív, ha* $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$,
(5) *Ha $u_1, \dots, u_k$ generátorrendszer U-ban, akkor $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ generátorrendszer az* $\mathrm{Im}\,\varphi$ *képtérben.*
(6) *Ha $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ lineárisan független vektorrendszer V-ben, akkor $u_1, \dots, u_k$ lineárisan független U-ban.*

4. Tétel (Lineáris leképezések dimenziótétele). *Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$. Ha U végesdimenziós, akkor*

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\,\varphi).$$

5. Következmény. *Végesdimenziós vektortér lineáris transzformációja akkor és csak akkor injektív, ha szürjektív.*

6. Következmény. *Legyen T test, $m, n \geq 1$ és $A \in T^{m\times n}$. Az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterének dimenziója (azaz a szabad változók száma) $n - r(A)$.*

7. Tétel. *Ha V a T test feletti n-dimenziós vektortér, akkor V izomorf a T^n vektortérrel. Tehát bármely két T-feletti n-dimenziós vektortér izomorf egymással.*

8. Definíció. Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek. A $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezések összegén, illetve a φ leképezés $c \in T$ skalárral való szorzatán azt a $\varphi + \psi : U \to V$, illetve $c\varphi : U \to V$ leképezéseket értjük, amelyekre

$$u(\varphi + \psi) = u\varphi + u\psi, \qquad u(c\varphi) = c(u\varphi) \qquad \text{minden } u \in U \text{ esetén.}$$

9. Tétel. *Tetszőleges U és V ugyanazon T test feletti vektorterek esetén* $\mathrm{Hom}(U,V)$ *a fent definiált műveletekkel vektorteret alkot T felett.*

10. Tétel. *Tetszőleges U, V és W ugyanazon T test feletti vektorterekre érvényesek a következők:*

(1) *Ha* $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ *és* $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$*, akkor* $\varphi\psi \in \mathrm{Hom}(U,W)$.
(2) *Ha* $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ *bijektív, akkor* $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(V,U)$.
(3) *Ha* $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ *és* $c \in T$*, akkor* $c(\varphi\psi) = (c\varphi)\psi = \varphi(c\psi)$.
(4) *Ha* $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ *és* $\tau \in \mathrm{Hom}(V,W)$*, akkor* $(\varphi+\psi)\tau = \varphi\tau + \psi\tau$.
(5) *Ha* $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ *és* $\psi, \tau \in \mathrm{Hom}(V,W)$*, akkor* $\varphi(\psi+\tau) = \varphi\psi + \varphi\tau$.

11. Tétel. *Legyen U végesdimenziós, V pedig tetszőleges ugyanazon T test feletti vektortér, $e_1, \dots, e_n \in U$ bázis és $v_1, \dots, v_n \in V$ tetszőleges vektorrendszer. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott* $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ *lineáris leképezés, amelyre*

$$e_1\varphi = v_1, e_2\varphi = v_2, \dots, e_n\varphi = v_n.$$

12. Definíció. Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n \in V$ bázisokkal. Tetszőleges $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezésre léteznek olyan egyértelműen meghatározott $a_{i,j} \in T$ skalárok, hogy

$$e_i\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j \qquad \text{minden } i = 1, \dots, m \text{ esetén.}$$

Az $(a_{i,j})_{m\times n}$ mátrixot a φ lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban megadott mátrixának nevezzük.

13. Példa. Megadjuk a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z)\varphi = (x+2y, y+z)$ lineáris leképezés mátrixát az $\mathcal{E} : (1,0,0), (1,0,-1), (1,1,1)$, valamint az $\mathcal{F} : (1,0), (1,-1)$ bázisok esetén. Keressük azt az $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ mátrixot, amelyre teljesül:

$$\begin{aligned} (1,0,0)\varphi &= (1,0) = a_{11}(1,0) + a_{12}(1,-1) \\ (1,0,-1)\varphi &= (1,-1) = a_{21}(1,0) + a_{22}(1,-1) \\ (1,1,1)\varphi &= (3,2) = a_{31}(1,0) + a_{32}(1,-1). \end{aligned}$$

Az első egyenletből az $a_{11} + a_{12} = 1$, valamint a $-a_{12} = 0$ összefüggéseket kapjuk, melynek megoldása: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$. Hasonlóan a másodikból megkapható, hogy $a_{21} = 0$ és $a_{22} = 1$, a harmadikból pedig $a_{31} = 5$, $a_{32} = -2$ adódik. Tehát a φ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

14. Tétel. *Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n \in V$ bázisokkal, továbbá legyen $A \in T^{m\times n}$ a* $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ *lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban megadott mátrixa. Ha az $u \in U$ vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban $x = (x_1, \dots, x_m)$, akkor az $u\varphi \in V$ vektor koordinátasora az $\mathcal{F}$ bázisban xA.*

15. Példa. A 13. példában szereplő φ lineáris leképezés, valamint $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok esetén megadjuk az $u = (1,3,-1) \in \mathbb{R}^3$ standard bázisban felírt vektor koordinátasorát az $\mathcal{E}$ bázisban, és az $u\varphi$ koordinátasorát az $\mathcal{F}$ bázisban.
Az u koordinátasora $x = (x_1, x_2, x_3)$, ha $(1,3,-1) = x_1(1,0,0) + x_2(1,0,-1) + x_3(1,1,1)$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x_1 = -6,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3$, tehát az u vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban $x = (-6, 4, 3)$. Az $u\varphi \in \mathbb{R}^2$ vektor koordinátasora az $\mathcal{F}$ bázisban a 14. tétel és a 13. példában kapott mátrix segítségével a következőképpen számolható:

$$xA = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy az $u\varphi$ vektor koordinátasora a standrad bázisban: $9(1,0)+(-2)(1,-1) = (7,2)$.

16. Tétel. *Legyenek $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ rendre az U, V és W ugyanazon T test feletti végesdimenziós vektorterek bázisai. Legyen A és B rendre a $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések mátrixai az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban, illetve C a $\tau \in \operatorname{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ bázisokban, és legyen $c \in T$. Ekkor*

(1) *$A + B$ a $\varphi + \psi$ lineáris leképzés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban,*
(2) *cA a $c\varphi$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban,*
(3) *AC a $\varphi\tau$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{G}$ bázisokban.*

17. Következmény. *Ha U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a T test felett, akkor a lineáris leképezések $\operatorname{Hom}(U, V)$ vektortere izomorf az $m \times n$-es mátrixok $T^{m\times n}$ vektorterével, és így mn dimenziós.*

18. Definíció. Legyen $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m$ és $\mathcal{E}' : e'_1, \dots, e'_m$ a T test feletti U vektortér két bázisa. Az $\mathrm{id} \in \operatorname{Hom}(U, U)$ identikus lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ bázisokban megadott mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.

19. Példa. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektortér következő két bázisát, $\mathcal{E} : (1,0,0), (1,0,-1), (1,1,1)$ és $\mathcal{E}' : (0,0,1), (1,1,1), (0,-1,-2)$. Megadjuk az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra való áttérés mátrixát, ami az előző definíció szerint az identikus leképezés mátrixával egyezik meg. Keressük azt a $P = (p_{ij})_{3\times 3}$ mátrixot, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
(1,0,0)\mathrm{id} = (1,0,0) &= p_{11}(0,0,1) + p_{12}(1,1,1) + p_{13}(0,-1-2) \\
(1,0,-1)\mathrm{id} = (1,0,-1) &= p_{21}(0,0,1) + p_{22}(1,1,1) + p_{23}(0,-1-2) \\
(1,1,1)\mathrm{id} = (1,1,1) &= p_{31}(0,0,1) + p_{32}(1,1,1) + p_{33}(0,-1-2).
\end{aligned}$$

Az első egyenletből a $p_{12} = 1$, $p_{12} - p_{13} = 0$ és a $p_{11} + p_{12} - 2p_{13} = 0$ összefüggéseket kapjuk, melynek megoldása: $p_{11} = p_{12} = p_{13} = 1$. A második egyenletből hasonlóan számítható, hogy $p_{21} = 0$, $p_{22} = p_{23} = 1$, a harmadikból pedig $p_{31} = p_{33} = 0$ és $p_{32} = 1$ adódik. Tehát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra való áttérés mátrixa:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. Tétel. *Legyen a T test feletti U vektortér két bázisa $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$, továbbá legyen P az áttérés mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra. Ekkor P nemelfajuló mátrix, továbbá az $\mathcal{E}'$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrixa P^{-1}.*

21. Tétel. *Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ az U, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ pedig a V vektortér bázisa. Jelölje P, illetve S az áttérés mátrixát $\mathcal{E}$-ről $\mathcal{E}'$-re, illetve $\mathcal{F}$-ről $\mathcal{F}'$-re. Legyen $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés, és legyen φ mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban A. Ekkor φ mátrixa az $\mathcal{E}'$ és $\mathcal{F}'$ bázisokban $P^{-1}AS$.*

22. Példa. Tekintsük a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z)\varphi = (x + 2y, y + z)$ lineáris leképezést, és az $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathcal{E}' : (0,0,1), (1,1,1), (0,-1,-2)$, illetve az $\mathbb{R}^2$ vektortér $\mathcal{F}' : (0,-1), (1,2)$ bázisát. Az 21. tétel segítségével megadjuk a φ mátrixát az $\mathcal{E}'$ és $\mathcal{F}'$ bázisokban úgy, hogy felhasználjuk, hogy a 13. példában megadtuk a φ leképezés A mátrixát az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban, a 19. példában pedig az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra való áttérés P mátrixát. Ahhoz, hogy a

13. példában szereplő A mátrixot felhasználhassuk a 21. tétel szerint ki kell még számolnunk az $\mathcal{F}:(1,0),(1,-1)$ bázisról az $\mathcal{F}'$ bázisra való áttérés $S=(s_{ij})_{2\times 2}$ mátrixát, amelyre teljesül, hogy:

$$(1,0)\mathrm{id}=(1,0)=s_{11}(0,-1)+s_{12}(1,2)$$
$$(1,-1)\mathrm{id}=(1,-1)=s_{21}(0,-1)+s_{22}(1,2).$$

Amiből megkapjuk, hogy $s_{11}=1$, $s_{12}=1$, $s_{21}=3$ és $s_{22}=1$. Meg kell még határoznunk P^{-1}-et:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Tehát a φ lineáris leképezés A' mátrixát a 21. tétel alapján következőképpen kapjuk:

$$A'=P^{-1}AS=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\4&3\\-1&-2\end{pmatrix}.$$

23. Definíció. Legyen T test és n pozitív egész. Az $A,B\in T^{n\times n}$ mátrixok hasonlók, ha létezik olyan nemelfajuló $P\in T^{n\times n}$ mátrix, hogy $A=P^{-1}BP$.

24. Következmény. *Ugyanazon lineáris transzformáció két különböző bázisban felírt mátrixa hasonló.*

25. Definíció. A φ lineáris leképezés rangján a képterének dimenzióját értjük, azaz $r(\varphi)=\dim(\operatorname{Im}\varphi)$.

26. Tétel. *Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangja megegyezik valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangjával.*

27. Példa. Vegyük a 13. példában szereplő $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $(x,y,z)\varphi=(x+2y,y+z)$ lineáris leképezést, és az $\mathcal{E}:(1,0,0),(1,0,-1),(1,1,1)$, valamint az $\mathcal{F}:(1,0),(1,-1)$ bázisokat, meghatározzuk a φ képterét és magterét. A 13. példában kiszámítottuk az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban a φ mátrixát:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\5&-2\end{pmatrix}.$$

Mivel $r(A)=2$, az előző tételt felhasználva $\dim(\operatorname{Im}\varphi)=r(\varphi)=r(A)=2$, így $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^2$. Meghatározzuk a $\operatorname{Ker}\varphi=\{\,u\in\mathbb{R}^3 : u\varphi=0\,\}$ magteret. A lineáris leképezések dimenziótétele (4. tétel) szerint: $\dim(\operatorname{Ker}\varphi)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\operatorname{Im}\varphi)=3-2=1$ teljesül. Tehát $\operatorname{Ker}\varphi$ bázisa egyelemű. Az $\mathcal{E}$ bázisban megadott $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ vektor eleme a magtérnek, ha teljesül, hogy:

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+5x_3&x_2-2x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}.$$

Tehát az $x_1+5x_3=0$ és $x_2-2x_3=0$ egyenletek adódnak, amelyek egy homogén lineáris egyenletrendszert alkotnak. Ha x_3-at szabad ismeretlennek választjuk, akkor a kötött ismeretlenekre kapjuk, hogy $x_1=-5x_3$ és $x_2=2x_3$. A szabad ismeretlent 1-nek választva a $(-5,2,1)$ vektor a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak egy bázisa lesz, tehát $\operatorname{Ker}\varphi=[(-5,2,1)]$.

28. Következmény. *Legyen φ lineáris transzformáció valamely végesdimenziós vektortérben. Ekkor φ akkor és csak akkor bijektív, ha valamely (bármely) bázisbeli mátrixa nemelfajuló.*

29. Tétel. *Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektorterek ugyanazon T test fölött, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$. Ekkor φ mátrixa az U és V egy-egy alkalmas bázisában*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T^{m\times n},$$

ahol r a φ rangja, E_r az $r\times r$ méretű egységmátrix, és a zérók a megfelelő méretű zérómátrixok.

30. Következmény. *Legyen T tetszőleges test. Ekkor minden $A \in T^{m\times n}$ mátrixhoz létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{m\times m}$ és $Q \in T^{n\times n}$ mátrixok, hogy*

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol r az A mátrix rangja, és a jobboldalon álló mátrix ugyanaz, mint az előző tételben.

31. Definíció. Legyen T test, V vektortér T felett, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,V)$. A $\lambda \in T$ skalár a φ lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $v \in V$ vektor, hogy $v\varphi = \lambda v$. A

$$\{\, v \in V : v\varphi = \lambda v \,\}$$

alteret a $\lambda \in T$ skalárhoz tartozó sajátaltérnek nevezzük. A nemnulla $v \in V$ vektor a φ lineáris transzformáció sajátvektora, ha valamely sajátaltérben benne van, azaz létezik olyan $\lambda \in T$, hogy $v\varphi = \lambda v$.

32. Definíció. Legyen T test, n pozitív egész. Az $A \in T^{n\times n}$ mátrix sajátértéke, sajátaltere és sajátvektora rendre a $\varphi : T^n \to T^n$, $x \mapsto xA$ lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltere, illetve sajátvektora. Azaz $\lambda \in T$ és $x \in T^n$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor pár, ha $xA = \lambda x$.

33. Tétel. *Legyen V n-dimenziós vektortér a T test felett, $e_1,\dots,e_n$ bázis V-ben, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,V)$ és $A \in T^{n\times n}$ a φ lineáris transzformáció mátrixa az $e_1,\dots,e_n$ bázisban. Ekkor $\lambda \in T$ és $v \in V$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor párja φ-nek, ha λ és v koordinátasora sajátérték, sajátvektor párja A-nak.*

34. Tétel. *Legyen U tetszőleges vektortér a T test felett, $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in T$ páronként különböző sajátértékei a $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,U)$ lineáris transzformációnak, és $U_1,\dots,U_k$ pedig ezen sajátértékekhez tartozó sajátalterek. Ha $U_1+\dots+U_k = U$, akkor φ egyértelműen meghatározott.*

35. Definíció. Az $A \in T^{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja az

$$f_A(x) = |A - xE|$$

determinánssal megadott T-feletti polinom. Az $f_A(x)$ polinom T-be eső gyökeit az A mátrix karakterisztikus gyökeinek nevezzük.

36. Tétel. *Legyen T test. A $\lambda \in T$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke az $A \in T^{n\times n}$ mátrixnak, ha λ karakterisztikus gyöke A-nak.*

37. Példa. Kiszámoljuk az alábbi $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix sajátértékeit, és meghatározzuk a hozzá tartozó sajátaltereket.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Az $|A-xE|$ determinánst az első oszlopa szerint kifejtve kapjuk az A mátrix karakterisztikus polinomját:

$$f_A(x) = |A-xE| = \begin{vmatrix} 7-x & -3 & 1 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 9 & 4-x \end{vmatrix} = (7-x)[(1-x)(4-x)-18] = (7-x)(x-7)(x+2).$$

Az $f_A(x)$ polinom valós gyökei, azaz az A mátrix sajátértékei a $\lambda_1 = 7$ és a $\lambda_2 = -2$ skalárok.

Meghatározzuk a $\lambda_1 = 7$ sajátértékhez tartozó sajátalteret. Az $xA = \lambda_1 x$ összefüggést átrendezve az $x(A - \lambda_1 E) = 0$ homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldásai alkotják a $\lambda_1 = 7$-hez tartozó sajátalteret.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3x_1 - 6x_2 + 9x_3 & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a második egyenlet a harmadik (-3)-szorosa, így elég figyelembe venni az $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ összefüggést, amiből $x_1 = -2x_2 + 3x_3$-at kapjuk, azaz x_1 kötött ismeretlen, x_2 és x_3 pedig szabad. A megoldástér egy bázisát úgy kapjuk, hogy a szabad változókba behelyettesítjük a 0 és 1 értékeket úgy, hogy mindig egy szabad változó kapjon 1 értéket. Így

$$\begin{aligned} x_2 &= 1, & x_3 &= 0, & x_1 &= -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = -2, \\ x_2 &= 0, & x_3 &= 1, & x_1 &= -2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

Az így kapott $(-2, 1, 0)$ és $(3, 0, 1)$ vektorok alkotják a $\lambda_1 = 7$-hez tartozó sajátaltér egy bázisát.
A $\lambda_2 = -2$-höz tartozó sajátaltér hasonlóképpen számítható, egy bázisa a $(0, -3, 1)$ vektor.

38. Tétel. *Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.*

39. Definíció. Véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjának karakterisztikus polinomja a lineáris transzformáció valamely (bármely) bázisban felírt mátrixának karakterisztikus polinomja.