# Komplex számok

(előadásvázlat, 2012. augusztus 31.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: test, test additív és multiplikatív csoportja, valós számok és tulajdonságaik.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- Szendrei Ágnes: *Diszkrét matematika*, Polygon Kiadó, Szeged, 1994–2002.

**1. Definíció.** A valós számokból álló számpárokat komplex számoknak nevezzük. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli, azaz $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**2. Definíció.** Az $(a, b)$ és $(c, d)$ komplex számok összege és szorzata:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

**3. Példa.** Az $(1, 2)$ és $(3, 4)$ komplex számok összege és szorzata:

$$(1, 2) + (3, 4) = (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6), \text{ és}$$
$$(1, 2) \cdot (3, 4) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = (3 - 8, 4 + 6) = (-5, 10).$$

**4. Tétel.** $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ *test.*

*Bizonyításvázlat.* Minden könnyen leellenőrizhető, ha az additív egységnek a $(0, 0)$, míg a multiplikatív egységnek az $(1, 0)$ komplex számokat választjuk. Az egyetlen érdekes kérdés a multiplikatív inverz létezése: tetszőleges, az additív egységtől különböző $(a, b) \in \mathbb{C}$ inverze

$$(a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

mivel

$$(a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{-b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0). \qquad \square$$

**5. Példa.**

$$\frac{(1, 2)}{(3, 4)} = (1, 2) \cdot (3, 4)^{-1} = (1, 2) \cdot \left( \frac{3}{25}, \frac{-4}{25} \right) = \left( \frac{3 - (-8)}{25}, \frac{-4 + 6}{25} \right) = \left( \frac{11}{25}, \frac{2}{25} \right).$$

**6. Kérdések.** A következő állítások közül melyek igazak tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén:

(1) $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$,
(2) $(a, 0) \cdot (c, 0) = (a \cdot c, 0)$,
(3) $(0, b) \cdot (0, d) = (0, b \cdot d)$?

**7. Tétel.** *Minden* $a, b \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad -(a, 0) = (-a, 0),$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0), \qquad (a, 0)^{-1} = (a^{-1}, 0).$$

**8. Definíció.** Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén az $(a, 0)$ komplex szám helyett egyszerűen $a$-t írunk, és nem is különböztetjük meg az $a$ valós számtól. Úgy tekintjük, hogy $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Továbbá a $(0, 1)$ komplex számot $i$-vel jelöljük.

**9. Tétel.** *Tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$ *esetén* $(a, b) = a + bi$, *azaz minden komplex szám egyértelmű módon előáll* $a + bi$ *alakban. Továbbá* $i^2 = -1$.

**10. Definíció.** A $z \in \mathbb{C}$ komplex szám $a + bi$ alakban való felírását $z$ kanonikus alakjának nevezzük. Az $a \in \mathbb{R}$ számot $z$ valós részének, míg a $b \in \mathbb{R}$ számot $z$ képzetes részének hívjuk, és $a = \operatorname{Re} z$, illetve $b = \operatorname{Im} z$-vel jelöljük. Az $i$ komplex szám neve képzetes egység.

**11. Példa.** A következő számolásban csak azt használtuk ki, hogy $\mathbb{C}$ test (azaz érvényesek a szokásos számolási szabályok) és $i^2 = -1$:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Vessük össze a kapott eredményt a komplex számok szorzásának definíciójával! A multiplikatív inverz kiszámolásánál azt a jól ismert azonosságot alkalmazzuk, hogy $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - (bi)^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

**12. Definíció.** Legyen adott a síkban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, és feleltessük meg az $a + bi$ komplex számnak az $(a, b)$ koordinátájú pontot. Így kapjuk a komplex számsíkot, más néven a Gauss-féle számsíkot. Az első tengelyt (abszcissza) valós tengelynek, a második tengelyt (ordináta) pedig képzetes tengelynek hívjuk. A valós tengelyen találhatók a valós számok, a képzetes tengelyen pedig a tiszta képzetes számok.

**13. Definíció.** A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltján a $\overline{z} = a - bi$ komplex számot, és abszolút értékén a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ valós számot értjük.

**14. Megjegyzés.** A komplex számsíkon a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés, az abszolút érték az origótól (nullától) mért távolság, a komplex számok összeadása pedig (hely)vektorok összeadása.

**15. Tétel.** *Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számra*

(1) $\overline{\overline{u}} = u$,
(2) $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$,
(3) $\overline{u - v} = \overline{u} - \overline{v}$,
(4) $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$
(5) $\overline{u/v} = \overline{u}/\overline{v}$, *ha* $v \neq 0$,
(6) $\overline{u} = u \iff u \in \mathbb{R}$,
(7) $u + \overline{u} = 2 \operatorname{Re} u$,
(8) $u \cdot \overline{u} = |u|^2$.

**16. Tétel.** *Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számra*

(1) $|u| = 0 \iff u = 0$,
(2) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$,
(3) $|u/v| = |u|/|v|$, *ha* $v \neq 0$,
(4) $|u + v| \leq |u| + |v|$,
(5) $|\overline{u}| = |u|$.

**17. Tétel.** *Legyenek $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplex számok úgy, hogy a komplex számsíkon az általuk meghatározott poligon konvex, és a $z_1, \ldots, z_n$ csúcsok az óramutató járásával ellentétes irányban helyezkednek el. Ekkor a poligon területe a következő képlettel számolható:*

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2 + \overline{z_2} z_3 + \cdots + \overline{z_{n-1}} z_n + \overline{z_n} z_1).$$

**18. Definíció.** Egy nemnulla $z$ komplex szám argumentuma az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül, hogy átmenjen a $z$-nek megfelelő ponton, amit $\arg z$-vel jelöljük. A nulla számnak nincsen argumentuma.

**19. Kérdések.** Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

(1) Minden nemnulla valós szám argumentuma nulla.
(2) Minden $\pi$ argumentumú komplex szám valós.

(3) Az $i$ komplex szám argumentuma $3\pi/2$.
(4) Az $1-i$ komplex szám argumentuma $-\pi/4$.
(5) Az $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ komplex szám argumentuma $-\pi/3$.
(6) Minden nemnulla $z\in\mathbb{C}$ számra $\overline{\arg z}=\arg\overline{z}$.
(7) Minden nemnulla $z\in\mathbb{C}$ számra $\arg(-z)=\arg z+\pi$.
(8) Minden nemnulla $z\in\mathbb{C}$ számra $\arg(2z)=2\arg z$.

**20. Tétel.** *Tetszőleges $0\neq z\in\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{R}^+$ és $\varphi\in\mathbb{R}$ számok esetén*

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\iff r=|z| \text{ és } \varphi\equiv\arg z \pmod{2\pi}.$$

**21. Definíció.** A nemnulla komplex számok

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

alakban való felírását trigonometrikus alaknak nevezzük. A nulla komplex számnak nincsen trigonometrikus alakja.

**22. Megjegyzés.** A nullától különböző komplex számok argumentuma csak „modulo $2\pi$", azaz $2\pi$ egész számú többszöröseitől eltekintve meghatározott. Ezért a komplex számok trigonometrikus alakja sem egyértelmű: például mind $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, mind a $\cos\frac{-3\pi}{2}+i\sin\frac{-3\pi}{2}$ az $i$ komplex szám trigonometrikus alakja. Viszont ha egy konkrét komplex szám trigonometrikus alakját kell meghatároznunk, akkor az argumentumot mindig a $[0,2\pi[$ intervallumban adjuk meg.

**23. Tétel.** *Tetszőleges nullától különböző $u=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ és $v=s(\cos\psi+i\sin\psi)$ komplex számokra*

(1) $\bar{u}=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$,
(2) $u\cdot v=rs(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi))$,
(3) $u^{-1}=r^{-1}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$,
(4) $u/v=r/s\cdot(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi))$,

**24. Megjegyzés.** A komplex számok kanonikus alakját felhasználva látható, hogy rögzített $v\in\mathbb{C}$ komplex szám esetén a $z\mapsto z+v$ leképezés nem más, mint a $v$-hez tartozó vektorral való eltolás a komplex számsíkon. A komplex számok trigonometrikus alakját felhasználva pedig látható, hogy rögzített $v=\cos\psi+i\sin\psi$ esetén a $z\mapsto z\cdot v$ leképezés nem más, mint az origó körüli $\psi$ szögű forgatás a komplex számsíkon.

**25. Példa.** Az ismert szinusz és koszinusz összegzési képleteket könnyen megkaphatjuk komplex számok segítségével. Tekintsük a

$$u=\cos\varphi+i\sin\varphi,\qquad v=\cos\psi+i\sin\psi$$

komplex számokat. A trigonometrikus alakokkal számolva a szorzatuk

$$u\cdot v=\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi).$$

De ha a kanonikus alakot használjuk a szorzat kiszámolására, akkor

$$\begin{aligned}u\cdot v&=(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot(\cos\psi+i\sin\psi)\\&=\cos\varphi\cdot\cos\psi+\cos\varphi\cdot i\sin\psi+i\sin\varphi\cdot\cos\psi+i\sin\varphi\cdot i\sin\psi\\&=(\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi)+i(\cos\varphi\cdot\sin\psi+\sin\varphi\cdot\cos\psi).\end{aligned}$$

Mivel az $u\cdot v$ komplex szám egyértelműen írható fel kanonikus alakban, ezért

$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\psi)&=\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi,\ \text{ és}\\\sin(\varphi+\psi)&=\cos\varphi\cdot\sin\psi+\sin\varphi\cdot\cos\psi.\end{aligned}$$

Hasonlóan számítható ki a $\cos(\varphi-\psi)$ és $\sin(\varphi-\psi)$ képlete is, de ekkor az $u$ és $v$ komplex számok hányadosát kell vennünk.

**26. Tétel (Moivre-képlet).** *Bármely nem zéró $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám és $n \in \mathbb{Z}$ esetén*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

**27. Kérdések.**

(1) Miért nem lehet az előző tétel képletét használni például a $i^{0.123456}$ értékének definiálásához?
(2) Igaz-e, hogy $i^{-1} = -i$?
(3) Igaz-e minden $0 \neq z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, hogy $|z^n| = |z|^n$?
(4) Igaz-e minden $0 \neq z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, hogy $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$?
(5) Milyen vonalon helyezkednek el a $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ valódi komplex szám egész hatványai?
(6) Melyek azok a $z$ komplex számok, amelyekre $\arg z = \arg(z^2)$?
(7) Melyek azok a $z$ komplex számok, amelyekre $\arg z = \arg(z^3)$?
(8) Melyek azok a $z$ komplex számok, amelyekre $\arg z = \arg(z^{-1})$?
(9) Melyek azok a $z$ komplex számok, amelyekre $|z| = |z^2|$?

**28. Példa.** Tudjuk, hogy $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ és $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Megmutatjuk, hogy $\cos 3\alpha$ és $\sin 3\alpha$ hogyan számítható ki egyszerűen. Vegyük a $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ komplex számot és számoljuk ki a harmadik hatványát a trigonometrikus alakja

$$z^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha,$$

és a kanonikus alakjai segítségével (felhasználva azt, hogy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$)

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 \\ &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha - i\sin^3\alpha \\ &= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha, \text{ és} \\ \sin 3\alpha &= 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha. \end{aligned}$$

**29. Definíció.** Tetszőleges $n$ pozitív egész szám és $z \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy az $u$ komplex szám $n$-edik gyöke $z$-nek, ha $u^n = z$.

**30. Tétel.** *Minden nemnulla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex számnak pontosan $n$ különböző $n$-edik gyöke van, mégpedig*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, \ldots, n-1).$$

**31. Példa.** Számítsuk ki az 1 komplex számnak a tizenkettedik gyökeit, és adjuk meg őket kanonikus alakban. Az 1 trigonometrikus alakja természetesen az $1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$. Felhasználva a nevezetes szögek szinuszát és koszinuszát azt kapjuk, hogy az 1 tizenkét gyöke:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \cdot \left(\cos\frac{0}{12} + i\sin\frac{0}{12}\right) = 1, \\ u_1 &= 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

$$u_2 = 1 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$u_3 = 1 \cdot \left(\cos\frac{6\pi}{12} + i\sin\frac{6\pi}{12}\right) = i,$$

$$u_4 = 1 \cdot \left(\cos\frac{8\pi}{12} + i\sin\frac{8\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$u_5 = 1 \cdot \left(\cos\frac{10\pi}{12} + i\sin\frac{10\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$u_6 = 1 \cdot \left(\cos\frac{12\pi}{12} + i\sin\frac{12\pi}{12}\right) = -1,$$

$$u_7 = 1 \cdot \left(\cos\frac{14\pi}{12} + i\sin\frac{14\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$u_8 = 1 \cdot \left(\cos\frac{16\pi}{12} + i\sin\frac{16\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$u_9 = 1 \cdot \left(\cos\frac{18\pi}{12} + i\sin\frac{18\pi}{12}\right) = -i,$$

$$u_{10} = 1 \cdot \left(\cos\frac{20\pi}{12} + i\sin\frac{20\pi}{12}\right) = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$u_{11} = 1 \cdot \left(\cos\frac{22\pi}{12} + i\sin\frac{22\pi}{12}\right) = +\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

**32. Definíció.** Az $\varepsilon$ komplex számot $n$-edik egységgyöknek nevezzük ($n \in \mathbb{N}^+$), ha $\varepsilon^n = 1$. Az $\varepsilon$ komplex szám egységgyök, ha $n$-edik egységgyök valamely $n \in \mathbb{N}^+$-re.

**33. Tétel.** *Az $n$-edik egységgyökök a következők:*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, \dots, n-1).$$

*Ezzel a jelöléssel $\varepsilon_0 = 1$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ minden $k = 0, \dots, n-1$ esetén.*

**34. Megjegyzés.** Az $n$-edik egységgyökök egy szabályos $n$-szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek a körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa 1. (Ez a két információ egyértelműen meg is határozza az $n$-szöget.)

**35. Példa.** Az első egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^1 = 1 \,\} = \{1\}.$$

A második egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^2 = 1 \,\} = \{1, -1\}.$$

A harmadik egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^3 = 1 \,\} = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

A negyedik egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^4 = 1 \,\} = \{1, i, -1, -i\}.$$

A hatodik egységgyökök halmaza a

$$\{\, z \in \mathbb{C} : z^6 = 1 \,\} = \left\{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

**36. Tétel.** *Egy nemnulla komplex szám összes $n$-edik gyökét megkaphatjuk, ha egy rögzített $n$-edik gyökét megszorozzuk sorra az $n$-edik egységgyökökkel. Tehát ha $u^n = z \neq 0$, akkor a $z$ komplex szám $n$-edik gyökei: $u \cdot \varepsilon_k$ ahol $k = 0, \ldots, n-1$.*

**37. Példa.** Számoljuk ki a $\sqrt[3]{8i}$ értékeit. A $8i$ trigonometrikus alakja

$$8i = 8 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),$$

tehát mindhárom köbgyökének az abszolút értéke $\sqrt[3]{8} = 2$, és a gyökök

$$2 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$2 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$2 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = -2i.$$

Könnyen leellenőrizhető, hogy $-2i$ gyök, mivel $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$. Tehát ha alkalmazzuk az előző tételt, és tudjuk a harmadik egységgyököket, akkor megkapjuk a három gyököt:

$$-2i \cdot 1 = -2i,$$

$$-2i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$-2i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i.$$

**38. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a $\varepsilon$ komplex szám primitív $n$-edik egységgyök, ha $n$-edik egységgyök, de nem $m$-edik egységgyök semmilyen $0 < m < n$ egészre.

**39. Példa.** Az 1 primitív első egységgyök. A $-1$ primitív második egységgyök. A $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív harmadik egységgyökök. Az $i$ és $-i$ primitív negyedik egységgyökök. Az $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív hatodik egységgyökök.

**40. Tétel.** *Az $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ egységgyök akkor és csak akkor primitív $n$-edik egységgyök, ha $k$ relatív prím $n$-hez.*

**41. Tétel.** *A primitív $n$-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$, ahol $\varphi$ az Euler-féle függvény.*

**42. Kérdések.**

(1) Hány primitív ötödik egységgyök van?
(2) Hány primitív tizedik egységgyök van?
(3) Igaz-e, hogy minden egységgyök primitív $n$-edik egységgyök valamely $n$ egészre?
(4) Igaz-e, hogy minden olyan $z$ komplex szám, amelyre $|z| = 1$, egységgyök?
(5) Létezik-e olyan komplex szám, amely 17-edik és 73-madik egységgyök is?
(6) Létezik-e olyan komplex szám, amely 17-edik és 73-madik primitív egységgyök is?

**43. Tétel (Az algebra alaptétele).** *Ha $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ komplex együtthatós ($a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$) nemkonstans ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$) polinom, akkor multiplicitással számolva pontosan $n$ darab komplex gyöke van.*

**44. Tétel.** *Tetszőleges $z = a + bi$ komplex számra*

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = e^a \cdot (\cos b + i\sin b).$$

**45. Példa (Euler-formula).** $e^{i\pi} + 1 = 0$.