8. feladatsor – Kódolás

8.1. Feladat. Határozzuk meg a $C \subseteq K^n$ blokk-kód minimális távolságát, továbbá azt, hogy hány hibajelző, illetve hibajavító. Döntsük el, hogy a C kód lineáris-e.

(a) $C = \{000, 011, 101, 110\} \subseteq \mathbb{Z}_2^3$;
(b) $C = \{0102, 1010, 0021, 2200\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$;
(c) $C = \{0000, 0101, 1100, 1001\} \subseteq \mathbb{Z}_2^4$.

8.2. Feladat. Igazoljuk, hogy C lineáris kód. Határozzuk meg C információs rátáját. Adjunk meg egy C-vel ekvivalens D szisztematikus lineáris kódót. Adjuk meg D generátor- és ellenőrző mátrixát is.

(a) $C = \{0000, 0011, 1101, 1110\} \subseteq \mathbb{Z}_2^4$;
(b) $C = \{00000, 11110, 11011, 00101\} \subseteq \mathbb{Z}_2^5$;
(c) $C = \{0000, 1201, 2110, 2102, 1220, 0011, 2121, 1212, 0022\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$.

8.3. Feladat. G egy szisztematikus lineáris kód generátormátrixa. Döntsük el, hogy v kódszó-e, ha nem, akkor adjuk meg a v-hez legközelebbi kódszót.

(a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 5}, \quad v = 11111;$

(b) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 6}, \quad v = 211112;$

(c) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 6}, \quad v = 202010.$

8.4. Feladat. Adjuk meg a K test feletti n-hosszú Hamming-kód egy lehetséges P ellenőrző mátrixát, G generátormátrixát, valamint információs rátáját.

(a) $K = \mathbb{Z}_2, \quad n = 3;$
(b) $K = \mathbb{Z}_2, \quad n = 5;$
(c) $K = \mathbb{Z}_2, \quad n = 7;$
(d) $K = \mathbb{Z}_3, \quad n = 4.$

8.5. Feladat. Határozzuk meg az összes nemtriviális K test feletti n-hosszú ciklikus lineáris kódot.

(a) $K = \mathbb{Z}_3, \quad n = 3;$
(b) $K = \mathbb{Z}_2, \quad n = 4.$

8.6. Feladat. Tervezzünk a K test α eleme segítségével n-hosszú t-hibajelző BCH-kódot. Adjuk meg a kód generátormátrixát.

(a) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle, \quad \alpha = \overline{x+1}, \quad n = 6, \quad t = 2;$
(b) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + 1\rangle, \quad \alpha = \overline{x+1}, \quad n = 11, \quad t = 3;$
(c) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2\rangle, \quad \alpha = \overline{x}, \quad n = 8, \quad t = 2.$