3. feladatsor – Bázis, Rang

3.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss eliminációval:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array}\ ;$$

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array}\ ;$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -5 \end{array}\ ;$$

$$\text{(d)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array}\ .$$

3.2. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben. Határozzuk meg a vektorrendszerek rangját.

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $\quad v_1 = (1,\ 2,\ 1), v_2 = (1,\ -1,\ 1), v_3 = (1,\ 1,\ 0)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$; $\quad v_1 = (1,\ -2,\ 4),\ v_2 = (2,\ -3,\ 1),\ v_3 = (-4,\ 5,\ 5)$;
(c) $V = \mathbb{R}^4$; $\quad v_1 = (1,\ -2,\ 3,\ 4),\ v_2 = (0,\ -3,\ 1,\ 2),\ v_3 = (2\ -4,\ 5,\ 9)$;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^4$; $\quad v_1 = (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{1}),\ v_2 = (\overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}),\ v_3 = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1})$;
(e) $V = \mathbb{Z}_5^4$; $\quad v_1 = (\overline{4}, \overline{2}, \overline{2}, \overline{3}),\ v_2 = (\overline{4}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{1}),\ v_3 = (\overline{3}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{2})$,
$v_4 = (\overline{4}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{0})$.

3.3. Feladat. Határozzuk meg a következő valós mátrixok rangját, valamint adjunk meg a mátrixokban maximális méretű nemelfajuló (nem nulla) aldeterminánst.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

3.4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi, $\mathbb{Z}_5$ feletti mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{3} \end{pmatrix}.$$

3.5. Feladat. Tekintsük az alábbi V vektortereket. Soroljuk fel az U alterek elemeit.

(a) $V = \mathbb{Z}_2^3$; $\quad U = [(\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0})]$;
(b) $V = \mathbb{Z}_3^3$; $\quad U = [(\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1})]$;
(c) $V = \mathbb{Z}_3^3$; $\quad U = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_2 + x_3 = \overline{0},\ x_1 + \overline{2}x_2 = \overline{0}\}$;

(d) $V=\mathbb{Z}_3^4$; $\quad U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+\overline{2}x_4=\overline{0},\ \overline{2}x_1+x_3+x_4=\overline{0}\}$.

3.6. Feladat. Adjuk meg az alábbi v vektorok koordinátasorát a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér

$$(\overline{1},\overline{1},\overline{1}),(\overline{0},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0})$$

bázisában.

(a) $v=(\overline{1},\overline{0},\overline{0})$;
(b) $v=(\overline{1},\overline{0},\overline{1})$.

3.7. Feladat. Határozzuk meg a V vektortér U alterének dimenzióját és bázisát.

(a) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U=[(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)]$;
(b) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U=[(1,2,4,1),\ (-2,-4,-5,-3),(-1,-2,-7,0),\ (1,2,-2,3)]$;
(c) $V=\mathbb{Z}_5^4$; $\quad U=[(\overline{1},\overline{4},\overline{2},\overline{3}),(\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{2})]$;
(d) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1=2x_2,\ x_3=x_1+x_2\}$;
(e) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1=3x_2+x_3,\ x_4=0\}$;
(f) $V=\mathbb{Z}_3^4$; $\quad U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+\overline{2}x_4=\overline{0},\ \overline{2}x_1+x_3+x_4=\overline{0}\}$.

3.8. Feladat. Határozzuk meg a V vektorterek alábbi U_1 és U_2 alterei esetén az U_1+U_2 és az $U_1\cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát.

(a) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U_1=[(1,2,1,0),(-1,1,1,1)]$, $U_2=[(2,1,0,-1),(1,-1,3,7)]$;
(b) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U_1=[(1,2,1,3),(0,-2,3,-1)]$,
$U_2=[(0,2,-3,1),(0,-2,4,-4),(0,-6,11,-9)]$;
(c) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_2+x_3+x_4=0\}$,
$U_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+x_2=0,\ x_3=2x_4\}$;
(d) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+x_2+x_3=0,\ x_2-2x_3=0\}$,
$U_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon 2x_2-4x_3=0,\ 3x_3+x_4=0\}$;
(e) $V=\mathbb{Z}_3^4$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_2+x_4=\overline{0},\ \overline{2}x_1+\overline{2}x_3=\overline{0}\}$,
$U_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+\overline{2}x_4=\overline{0}\}$;
(f) $V=\mathbb{Z}_3^5$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\colon x_1+\overline{2}x_3=\overline{0},\ x_1+x_2+x_4=\overline{0},\ x_1+\overline{2}x_2+\overline{2}x_5=\overline{0}\}$, $U_2=[(\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{0})]$;
(g) $V=\mathbb{Z}_5^4$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+\overline{2}x_2+x_3=\overline{0},x_1+\overline{4}x_2=\overline{0},x_2+\overline{2}x_3=\overline{0}\}$, $U_2=[(\overline{1},\overline{1},\overline{2},\overline{1}),(\overline{1},\overline{3},\overline{4},\overline{3}),(\overline{4},\overline{3},\overline{2},\overline{3})]$.

3.9. Feladat. A V vektortér és U_1,U_2 altereinek megadott dimenziói esetén határozzuk meg az U_1+U_2 és az $U_1\cap U_2$ alterek dimenziójának összes lehetséges értékét.

(a) $\dim V=6$, $\quad\dim U_1=5$, $\quad\dim U_2=3$;
(b) $\dim V=5$, $\quad\dim U_1=4$, $\quad\dim U_2=3$;
(c) $\dim V=10$, $\quad\dim U_1=5$, $\quad\dim U_2=2$.