

## FELADATOK A „RELÁCIÓK, GRÁFOK” TÉMAKÖRHÖZ

### 1. rész

A feladatsorban használt jelölések:

$$\mathbb{R}^- = \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}, \quad \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\},$$

$$[a; b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\},$$

ahol  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a \leq b$ .

**4.1. Feladat.** Adja meg az  $\alpha = \{(x, y) \mid x + 2 = 3y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  megfeleltetés inverzét. Tartalmazza-e az  $\alpha^2 (= \alpha\alpha)$  megfeleltetés a  $(3, 7)$ ,  $(1, -1)$  és  $(-5, 3)$  számpárokat?

**4.2. Feladat.** Határozza meg az  $\alpha\beta$  megfeleltetés-szorzatot, valamint a  $\beta$  megfeleltetés inverzét, ha  $\alpha$  és  $\beta$  az alábbi megfeleltetések:

- (a)  $\alpha = \{(a, b) \mid a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ ,  $\beta = \{(a, b) \mid a = b^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;
- (b)  $\alpha = \{(a, b) \mid a^2 = b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ,  $\beta = \{(a, b) \mid a \leq b^2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ ;
- (c)  $\alpha = \{(a, b) \mid \sin a = b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ ,  $\beta = \{(a, b) \mid b \geq |a|\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ ;
- (d)  $\alpha = \{(x, y) \mid y^2 < x\} \subseteq \mathbb{R} \times [-2; 2]$ ,  $\beta = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\} \subseteq [-2; 2] \times [0; 2]$ ;
- (e)  $\alpha = \{(x, y) \mid y = \cos x\} \subseteq [0, \frac{1}{2}\pi] \times \mathbb{R}^+$ ,  $\beta = \{(x, y) \mid x = y + 1 \text{ vagy } y = 1\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

**4.3. Feladat.** Határozza meg az alábbi  $\alpha$  és  $\beta$  relációk  $\alpha\beta$  és  $\beta\alpha$  szorzatát. ( $E$ : az emberek halmaza,  $H$ : egy adott sík egyenesének halmaza)

- (a)  $\alpha = \{(x, y) \mid x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$ ,  $\beta = \{(x, y) \mid y \text{ az } x \text{ apja}\}$  az  $E$  halmazon;
- (b)  $\alpha = \beta = \{(e, f) \mid e \text{ merőleges } f\text{-re}\}$  a  $H$  halmazon;
- (c)  $\alpha = \{(x, y) \mid x = 2y\}$ ,  $\beta = \{(x, y) \mid x = 2^y\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (d)  $\alpha = \{(x, y) \mid 10x = y\}$ ,  $\beta = \{(x, y) \mid x = \lg y\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (e)  $\alpha = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ ,  $\beta = \{(x, y) \mid y - 1 = 3x\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (f)  $\alpha = \{(x, y) \mid y = |x|\}$ ,  $\beta = \{(x, y) \mid -8x = y + 1\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;

**4.4. Feladat.** Adjon meg a gráfjával az  $A = \{a, b, c, d\}$  halmazon egy olyan relációt, amely

- (a) reflexív, tranzitív, de nem szimmetrikus;
- (b) antiszimmetrikus, tranzitív, de nem dichotom;
- (c) dichotom, de nem reflexív.

**4.5. Feladat.** Legyen  $\varrho = \{(a, b) \mid a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$  az  $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  halmazon értelmezett reláció. Adja meg a  $\varrho$  reláció gráfját. Vizsgálja meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

**4.6. Feladat.** Vizsgálja meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsa meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés, illetve rendezés.

- (a)  $\{(a, b) \mid ab = 1\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (b)  $\{(a, b) \mid 4 \mid b - a\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- (c)  $\{(a, b) \mid a + 5 \leq b\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- (d)  $\{(a, b) \mid a < b\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (e)  $\{(a, b) \mid a \leq b\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (f)  $\{(a, b) \mid ab \geq 0\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (g)  $\{(a, b) \mid \frac{a}{b} < 0\}$  az  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  halmazon;
- (h)  $\{(x, y) \mid |x| + |y| < 3\}$  a  $\mathbb{Q}$  halmazon;
- (i)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 10\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- (j)  $\{(a, b) \mid |a| = |b|\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (k)  $\{(a, b) \mid |a - b| < 2\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (l)  $\{(a, b) \mid a - b < a^2\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- (m)  $\{(a, b) \mid a - b \leq a^2\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;
- (n)  $\{(a, b) \mid 3 < |a - b|\}$  a  $\mathbb{Q}$  halmazon;

- (o)  $\{(a, b) \mid 2 \mid a + b\}$  az  $\mathbb{N}$  halmazon; (p)  $\{(x, y) \mid 2 \mid x^2 + y^2\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;  
 (q)  $\{(x, y) \mid xy \geq 2\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon; (r)  $\{(x, y) \mid x - 3 \geq y\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon;  
 (s)  $\{(a, b) \mid a^2 + 2b \leq b^2 + 2a\}$  az  $\mathbb{N}$  halmazon; (t)  $\{(a, b) \mid |a - b| = 1\}$  az  $\mathbb{N}$  halmazon.  
 (u)  $\{(x, y) \mid (\sin^2 x - \sin^2 y)(\cos^2 x - \cos^2 y) = 0\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon.

**4.7. Feladat.** Igazolja, hogy a  $\varrho = \{(a, b) \mid |a - b| < 3\}$  reláció az  $\mathbb{R}$  halmazon szimmetrikus. Adja meg a  $\varrho$  reláció inverzét és komplementerét. Vizsgálja meg, szimmetrikusak-e ezek a relációk.

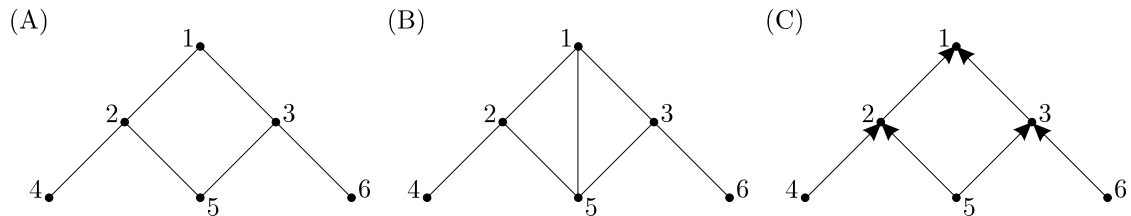
**4.8. Feladat.** Legyen  $X$  tetszőleges halmaz,  $\varrho$  pedig egy szimmetrikus reláció  $X$ -en. Bizonyítsa be, hogy  $\varrho$  inverze és komplementere is szimmetrikus.

**4.9. Feladat.** Reflexív-e reflexív relációk szorzata, inverze? Mit mondhatunk az antszimmetrikus relációkról?

**4.10. Feladat.** Legyen  $\varrho = \{(a, b) \mid a - b = 2\}$  reláció az  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmazon. Rajzolja fel a  $\varrho$  gráfját, adja meg (ne csak a gráfjával)

- (a)  $\varrho$  szimmetrikus lezártját;  
 (b)  $\varrho$  tranzitív lezártját;  
 (c)  $\varrho$  szimmetrikus lezártjának tranzitív lezártját;  
 (d)  $\varrho$  tranzitív lezártjának szimmetrikus lezártját.

**4.11. Feladat.** Melyik ábra adja meg egy részbenrendezett halmaz Hasse diagramját? Melyek ezen részbenrendezett halmaz minimális elemei?



**4.12. Feladat.** Adjon meg Hasse diagramjával olyan részbenrendezett halmazt, melynek alaphalmaza  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , továbbá 3 minimális és egy legnagyobb eleme van.

**4.13. Feladat.** Adja meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Adja meg a duális részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját is.

- (a)  $(A; \subseteq)$ , ahol  $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ;  
 (b)  $(B; \mid)$ , ahol  $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$ ;  
 (c)  $(C; \sqsubseteq)$ , ahol  $C = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$ , és  $a \sqsubseteq b$  pontosan akkor teljesül, ha  $a$  minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint  $b$  megfelelő számjegye;  
 (d)  $(D; \leq)$ , ahol  $D = \{(1, 1), (\frac{1}{2}, 2), (0, -1), (\frac{1}{3}, 3), (2, 2)\}$ , és  $\leq$  a komponensenkénti részbenrendezés.

**4.14. Feladat.** Legyen  $D_6 = (A; \mid)$  és  $P = (B; \leq)$  részbenrendezett halmaz, ahol  $A = \{2, 3, 6\}$  és  $B = \{0, 1, 3\}$ . Adja meg a  $D_6$  és a  $P$  részbenrendezett halmazok direkt szorzatának Hasse diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek?

**4.15. Feladat.** Az alábbi relációk közül melyik terjeszthető ki részbenrendezéssé

- (a)  $\alpha = \{(a, b) \mid a - a^2 \leq b\} \subseteq \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$ ;  
 (b)  $\beta = \{(a, b) \mid a - a^2 < b\} \subseteq \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$ ;  
 (c)  $\gamma = \{(v, w) \mid \sqrt{2}w = (1 + i)v\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ;  
 (d)  $\delta = \{(m, n) \mid \text{van olyan } \alpha \in \mathbb{N}, \text{ amelyre } m \mid n^\alpha\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ?

**4.16. Feladat.** Adja meg a

- (a)  $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}; \subseteq)$ ;  
 (b)  $(\{0, 1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}; \mid)$

részbenrendezett halmaz Hasse diagramját. Hányféleképpen terjeszthető ki rendezéssé? Adja meg egy kiterjesztését.

**4.17. Feladat.** Adjon meg az  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmazon olyan osztályozást, melynek pontosan 2 osztálya (blokkja) van. Adja meg a kapott osztályozáshoz tartozó ekvivalenciareláció gráfját.

**4.18. Feladat.** Határozza meg a következő osztályozásokhoz tartozó ekvivalenciarelációt.

- (a)  $\mathcal{C}_1 = \{\{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3, x^2 + 4x + 6, \frac{3}{2}x^2 + 6x + 9\}, \{\frac{5}{3}x + 5, x + 3\}, \{\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}, x^2 + 3x + 1\}\}$  az  $\{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3, x^2 + 4x + 6, \frac{3}{2}x^2 + 6x + 9, \frac{5}{3}x + 5, x + 3, \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}, x^2 + 3x + 1\}$  halmazon;
- (b)  $\mathcal{C}_2 = \{\{(1, -3), (-2, 6), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})\}, \{(\frac{1}{2}, -\frac{3}{7}), (5, -6)\}\}$  a  $\{(-2, 6), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}), (1, -3), (5, -6)\}$  halmazon;
- (c)  $\mathcal{C}_3 = \{\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1, i\}, \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 + i, 1 - i\}\}$  a  $\{-\sqrt{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, i, 1, 1 + i, 1 - i, \sqrt{2}\}$  halmazon;
- (d)  $\mathcal{C}_4 = \{\{f \in \mathbb{R}[x] \mid f^* = n\} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  az  $\mathbb{R}[x]$  polinomgyűrűn.

**4.19. Feladat.** Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (a)  $\{(a, b) \mid 4 \mid b - a\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- (b)  $\{(a, b) \mid |a| = |b|\}$  az  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- (c)  $\{(a, b) \mid ab > 0\}$  az  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  halmazon;
- (d)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \text{ páros}\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon;
- (e)  $\{(H, H') \mid |H| = |H'|\}$  az  $A = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$  halmazon, ahol  $H_1 = \{1, 2\}$ ,  $H_2 = \emptyset$ ,  $H_3 = \{a, b\}$ ,  $H_4 = \{0\}$  és  $H_5 = \{1, 2, 3\}$ ,  $H_6 = \{3, 4, 5\}$ ;
- (f)  $\{(a, b) \mid a\text{-nak és } b\text{-nek van közös prímosztója}\}$  a  $B = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$  halmazon;
- (g)  $\{(a, b) \mid a \text{ és } b \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$  a  $C = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$  halmazon;
- (h)  $\{(x, y) \mid \sin^2 x = \sin^2 y \text{ vagy } \cos^2 x = \cos^2 y\}$  az  $\mathbb{R}$  halmazon.

**4.20. Feladat.** Legyen  $\varrho = \{(a, b) \mid a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$  reláció az  $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  halmazon. Ekvivalenciareláció-e  $\varrho$ , illetve  $\varrho \cap \varrho^{-1}$  az  $A$  halmazon? Ha valamelyik reláció ekvivalencia, adja meg a hozzá tartozó osztályozást.

**4.21. Feladat.** Legyen  $\varrho$  tetszőleges részbenrendezés az  $A$  halmazon. Bizonyítsa be, hogy  $\varrho \cap \varrho^{-1}$  ekvivalenciareláció  $A$ -n.