Név: .... Összpontszám:

MBX114G: DISZKRÉT MATEMATIKA III VIZSGA, MÁJUS 25.

A ketteshez minimum 10 pontot kell elérnie az első feladatból! A többi feladatot csak akkor fogom kijavítani, ha ezt a 10 pontot sikerült elérni. A vizsgán, a gyakorlaton és az előadáson szerzett pontokat összeadva a következők ponthatárok.

elégtelen	0–43
elégséges	44–55
közepes	56–67
jó	68–79
jeles	80–100

Jó munkát!

1. Feladat. *(20 pt.)*
Igaz vagy hamis? A válaszokat nem kell indokolni; helyes válasz 1 *pont, hiányzó válasz* 0 *pont, helytelen válasz* −1 *pont.*

igaz hamis

○ ○ S_3*-nak három páratlan permutációja van.*
○ ○ *Az* $(1\ 2\ 3\ 4)^{2007}$ *permutáció páros.*
○ ○ $\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
○ ○ *Minden* $z \neq 0$ *komplex számra* $z = |z| \cdot (\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$.
○ ○ *Pontosan* 3 *darab primitív ötödik egységgyök van.*
○ ○ *Az* $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ *modulo maradékosztályok testet alkotnak, amely izomorf a komplex számok testével.*
○ ○ *Ha* $z \in \mathbb{C}$ *komplex szám* n*-edik egységgyök, akkor* $-z$ *is az.*
○ ○ *Ha* $\dim(U) = 3$, $\dim(V) = 2$ *és* $\dim(U \cap V) = 1$, *akkor* $\dim(U + V) = 5$.
○ ○ *A síkon az origó körüli* $90°$*-kal való forgatás rangja* 2.
○ ○ *Az* $l : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $l((a, b), (c, d)) = a^2$ *leképezés bilineáris.*
○ ○ *A síkon az* y*-tengelyre való vetítés karakterisztikus polinomja* $x^2 - x$.
○ ○ *Ha az* A *mátrix ortogonális, akkor* $A^{-1} = A^T$.
○ ○ *Euklideszi tér tetszőleges* u, v *vektoraira* $||u|| \cdot ||v|| \leq |\langle u, v\rangle|$.
○ ○ *Tetszőleges* $f, g \in T[x]$ *polinomokra ha* $f \mid g$ *és* $g \mid f$, *akkor* f *és* g *asszociáltak.*
○ ○ *Az* $\mathbb{R}[x]$ *polinomgyűrűben* $\operatorname{lnko}(x, 2) \sim 3$.
○ ○ *A* $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2\rangle$ *struktúra test.*
○ ○ *A* $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + \overline{1}\rangle$ *testben a* $\overline{0}$ *elem primitív.*
○ ○ *A* $C = \{1101, 1011, 1110, 0001\}$ *kód minimális távolsága* 2.
○ ○ *A* $\mathbb{Z}_2$ *feletti* 15*-hosszú Hamming-kód információs rátája* $\frac{12}{15}$.
○ ○ *A* $\mathrm{GF}(8)$ *test tetszőleges* α *elemére* α *és* α^2 *minimálpolinomjai megegyeznek.*

2. Feladat. *(6 pt.)*
Adjon példát olyan $\pi \in S_5$ permutációra, amely

(1) *páratlan de nem transzpozíció;*
(2) *páros és $M_\pi = \{1, 2, 3, 4\}$;*
(3) *páratlan és $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$.*

3. Feladat. *(8 pt.)*
Tekintsük a sík vektorterének, azaz $\mathbb{R}^2$-nek a következő lineáris transzformációit:

φ: *a sík vektorainak elforgatása az origó körül $\frac{-\pi}{2}$ szöggel,*
ψ: *az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a standard bázisban $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,*
χ: *az a lineáris transzformáció, amely tetszőleges (a, b) vektorhoz $(a - b, b + 2a)$-t rendeli.*

Állapítsa meg, hogy φ, ψ és χ lineárisan függetlenek-e a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vektortérben, és ha nem, akkor fejezze ki χ-t a φ és ψ lineáris kombinációjaként.

4. Feladat. *(10 pt.)*
Írja le a mátrix karakterisztikus gyökének definícióját, majd számolja ki az

$$A = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$$

mátrix sajátértékeit, és a hozzájuk tartozó sajátaltereket.

5. Feladat. *(6 pt.)*
Adjon példát olyan $f \in \mathbb{Q}[x]$ főpolinomra, amely

(1) *másodfokú és nem irreducibilis,*
(2) *harmadfokú és irreducibilis,*
(3) *másodfokú és $\mathrm{lnko}(f, x^2 - 1) = x + 1$*

6. Feladat. *(10 pt.)*
A $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$ test $\alpha = \overline{x^2 + 1}$ eleme segítségével tervezzen 6-hosszú 1-hibajavító BCH-kódot. Adja meg a kód generátormátrixát, és döntse el, hogy szisztematikus-e a kód.