

MBN211G: KLASSZIKUS ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET GYAKORLAT

(2008. május 15.)

1. LEKÉPEZÉSEK ÉS RELÁCIÓK

1.1. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra)

Döntsük el, hogy az \mathbb{R}^2 halmaz $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ részhalmaza előáll-e $A \times B$ alakban.

1.2. Feladat. (2 pt.)

Vizsgáljuk meg, hogy injektív-e, illetve szürjektív-e az alábbi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ leképezés, és adjuk meg az f^2 leképezést.

$$nf = \begin{cases} 6n + 1, & \text{ha } n \text{ páros, és} \\ 6n - 1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

1.3. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítandó, hogy ha az $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ és $h : C \rightarrow A$ leképezésekre $fgh = \text{id}_A$, továbbá g bijektív, h pedig injektív, akkor az f leképezés szürjektív.

1.4. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra és M. Miklós)

Legyen A véges halmaz és $f : A \rightarrow A$ leképezés.

- (1) Mutassuk meg, hogy van olyan n , hogy $f^{2n} = f^n$.
- (2) Az első részt felhasználva mutassuk meg, hogy ha f injektív, akkor bijektív is.
- (3) Az első részt felhasználva mutassuk meg, hogy ha f szürjektív, akkor bijektív is.

1.5. Feladat. (3 pt. Gy. Gergő)

Legyen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan leképezés, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re $(n+1)f > nf^2$. Bizonyítsuk, hogy $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

1.6. Feladat. (2 pt.)

Tetszőleges n pozitív egészre legyen $Z_n = \{0, \dots, n-1\}$ és R_n a Z_n halmaz n -hez relatív prím elemeinek halmaza. Legyenek m és n relatív prímek. Mutassuk meg, hogy ekkor

- (1) az $f : Z_{mn} \rightarrow Z_m \times Z_n$, $p \mapsto (p_m, p_n)$, ahol p_m a p m -mel és p_n a p n -nel való nem negatív osztási maradéka, leképezés bijektív,
- (2) a $g : R_{mn} \rightarrow R_m \times R_n$, $p \mapsto (p_m, p_n)$ jól definiált leképezés és szintén bijektív.

1.7. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás)

Ha az $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow A$ leképezésekre fennáll $fg = \text{id}_A$, akkor azt mondjuk, hogy a g az f -nek jobbinverze, f pedig a g -nek balinverze. Adjuk meg

- (1) az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$ képezés két különböző jobbinverzét,
- (2) a $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $n \mapsto |n|$ leképezés két különböző balinverzét.

1.8. Feladat. (2 pt.)

Legyenek A , B tetszőleges halmazok, s tegyük fel, hogy A -nak legalább két eleme van. Igazoljuk, hogy bármely $f : A \rightarrow B$ leképezésre

- (1) f akkor és csak akkor injektív, ha f -nek van jobbinverze,
- (2) f akkor és csak akkor szürjektív, ha f -nek van balinverze.

1.9. Feladat. (2 pt.)

Legyen A véges halmaz. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $f, g : A \rightarrow A$ leképezésekre, ha $fg = \text{id}_A$, akkor $gf = \text{id}_A$. Adjunk példát olyan végtelen A halmazra és f, g leképezésekre, amelyre az állítás nem teljesül.

1.10. Feladat. (2 pt.)

Legyen $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A, B \subseteq X$ részhalmazokra

- (1) $(A \cup B)f = Af \cup Bf$,
- (2) $(A \cap B)f \subseteq Af \cap Bf$,
- (3) a (2) részben akkor és csak akkor teljesül minden $A, B \subseteq X$ részhalmaz esetén egyenlőség, ha f injektív.

1.11. Feladat. (2 pt.)

Legyen $f : A \rightarrow B$ tetszőleges leképezés, továbbá $C \subseteq A$, $D \subseteq B$, és jelölje g az $f \cap (C \times D)$, C -ből D -be menő megfeleltetést. Rögzített A , B , C , D esetén mely f leképezésekre lesz g is leképezés?

1.12. Feladat. (2 pt.)

Határozzuk meg $\alpha\beta$, illetve, ha lehet $\beta\alpha$ szorzatot, ahol $\alpha = \{(x, y) : y = \sin x\} \subseteq [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ és $\beta = \{(x, y) : y \neq 0, x = y + \frac{1}{y}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.13. Feladat. (2 pt. közösen megoldottuk)

Fejezzük ki a

- (1) $\gamma = \{(a, b) : b \text{ az } a \text{ nagyszülője}\}$, és
- (2) $\delta = \{(a, b) : b \text{ az } a \text{ anyai nagyszülője}\}$

relációkat az emberek halmazán értelmezett

$$\alpha = \{(a, b) : b \text{ az } a \text{ apja}\} \text{ és } \beta = \{(a, b) : b \text{ az } a \text{ anyja}\}$$

relációk segítségével.

1.14. Feladat. (3 pt. előadta M. Miklós)

Legyen ϱ az A halmazból a B halmazba történő tetszőleges megfeleltetés. Bizonyítsuk be, hogy ϱ akkor és csak akkor leképezés, ha $\varrho^{-1}\varrho \subseteq \text{id}_B$, és $\varrho\varrho^{-1} \supseteq \text{id}_A$. Milyen hasonló feltételekkel lehetne leírni az injektív és szürjektív fogalmakat?

1.15. Feladat. (2 pt. előadta D. Tamás és Sz. Nóra)

Bizonyítsuk be, hogy a reflexivitás, a szimmetria és a tranzitivitás egymástól független tulajdonságok, azaz adjunk meg olyan relációt, amely

- (1) szimmetrikus és tranzitív, de nem reflexív,
- (2) reflexív és tranzitív, de nem szimmetrikus,
- (3) reflexív és szimmetrikus, de nem tranzitív.

1.16. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra)

Tekintsük a $P = (\{4, 6, 7, 14, 24, 42, 48\}, |)$ részbenrendezett halmazt, ahol $|$ a szokásos oszthatósági reláció. Rajzoljuk fel P Hasse-diagramját. Adjuk meg a legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elemeket, amennyiben léteznek.

1.17. Feladat. (2 pt.)

Mutassuk meg, hogy ha egy véges részbenrendezett halmazban egyetlen minimális elem van, akkor az legkisebb elem is. Adjunk példát olyan végtelen részbenrendezett halmazra, amelyre ez nem teljesül.

1.18. Feladat. (2 pt.)

Definiáljuk P és Q részbenrendezett halmazok $P \times Q$ szorzatát a következő módon. A $P \times Q$ részbenrendezett halmaz alaphalmaza P és Q alaphalmazainak direktszorzata, valamint $(p, q) \leq (p', q')$ pontosan akkor teljesül $P \times Q$ -ban, ha P -ben $p \leq p'$ és Q -ban $q \leq q'$.

- (1) Rajzoljuk fel $P \times Q$ Hasse-diagramját, ha $P = (\{4, 6, 7, 14, 24, 42, 48\}, |)$ és $Q = (\{0, 1\}, \leq)$.
- (2) Egy véges részbenrendezett halmaz *magassága* láncjai hosszának maximuma. Tetszőleges P és Q véges részbenrendezett halmazok esetén fejezzük ki $P \times Q$ magasságát P és Q magasságának segítségével.

1.19. Feladat. (2 pt.)

Határozzuk meg azokat a relációkat, amelyek egyidejűleg részbenrendezések és ekvivalenciák.

1.20. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Hány osztályozása van az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaznak?

1.21. Feladat. (2 pt.)

Legyen $f : A \rightarrow B$ szürjektív, $g : A \rightarrow C$ pedig tetszőleges leképezés. Mutassuk meg, hogy

- (1) akkor és csak akkor létezik olyan $h : B \rightarrow C$ leképezés, amelyre $g = fh$, ha $\ker(f) \subseteq \ker(g)$,
 (2) h egyértelműen meghatározott.

1.22. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Legyen ϱ reflexív, tranzitív reláció az A halmazon. Bizonyítsuk, hogy $\alpha = \varrho \cap \varrho^{-1}$ ekvivalencia A -n. Legyen β az a reláció A/α -n, melyre $\bar{a} \beta \bar{b}$ pontosan akkor, ha $a \varrho b$. Bizonyítsuk, hogy β részbenrendezés A/α -n.

1.23. Feladat. (2 pt.)

Tekintsük a $\varrho = \{((a, b), (c, d)) : ad = bc\}$ ekvivalenciát a $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ halmazon. Adjuk meg a ϱ -hoz tartozó osztályozást (azaz a $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\varrho$ faktorhalmazt) úgy, hogy minden osztályát pontosan egyszer soroljuk fel.

2. OSZTHATÓSÁG AZ EGÉSZ SZÁMOK KÖRÉBEN

2.1. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás és M. Miklós)

Oldjuk meg a $623x + 217y = 35$ és a $623x + 217y - 2z = 8$ diofantoszi egyenleteket.

2.2. Feladat. (2 pt.)

Tekintsük az $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n > 0$, rekurzióval megadott ún. Fibonacci-sorozatot. Mutassuk meg, hogy a Fibonacci sorozat n -edik tagja

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Továbbá $F_n \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$, ha $n \geq 2$.

2.3. Feladat. (3 pt. előadta Sz. Nóra)

- (1) Legyen $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Bizonyítsuk, hogy az a, b pozitív egészeken végrehajtott euklideszi algoritmus legfeljebb $\frac{\log_2 b}{\log_2 \alpha}$ lépésben véget ér.
 (2) Igazoljuk, ha az euklideszi algoritmust a legkisebb abszolút értékű maradékokat véve hajtjuk végre, akkor az legfeljebb $\log_2 b$ lépésben véget ér.

2.4. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsuk, hogy tetszőleges $n > 1$ -re az $\{1, \dots, n\}$ halmazból $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ elemet akárhogyan kiválasztva biztosan van két olyan kiválasztott elem, hogy az egyik relatív prím a másikhoz, és $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ elemet kiválasztva van két olyan kiválasztott elem is, hogy az egyik osztója a másiknak.

2.5. Feladat. (2 pt. előadta N. Levente)

Legyen s_n az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazba eső prímek száma plusz 1. Mutassuk meg, hogy $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak legfeljebb s_n darab eleme választható ki úgy, hogy bármely kettő relatív prím.

2.6. Feladat. (2 pt. előadta D. János és D. Tamás)

Mely y egészre lesz $4 + y^4$ prímszám?

2.7. Feladat. (2 pt. előadta D. Tamás)

Határozzuk meg az összes p prímet, melyre $29p + 1$ négyzetszám. Hasonlóan, mikor lesz $24p + 1$ négyzetszám?

2.8. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Zsolt, hiányzik még a (3)-as rész)

- (1) Bizonyítandó, hogy $n!$ prímtényezős felbontásában a p prím

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

kitevőn szerepel.

- (2) Határozzuk meg $10!$ prímtényezős felbontását.
 (3) Bizonyítsuk, hogy

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} \geq \frac{\sum_{i=1}^n \ln i}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{2}{i^{\frac{3}{2}}}.$$

2.9. Feladat. (2 pt.)

Találjuk meg az összes olyan a, b pozitív egészet, melyekre $a + b = 57$, és a és b legkisebb közös többszöröse 680.

2.10. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

nem egész, ha $n > 1$.

2.11. Feladat. (1 pt. előadta Sz. Nóra)

Bizonyítsuk, hogy minden m nemnegatív egészhez létezik egy $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, alakú egyenlet, melynek pontosan m megoldása van a pozitív egészek körében.

2.12. Feladat. (2 pt. előadta D. Tamás)

Keressük meg azokat az a, b pozitív egész számokat, melyekre $\text{lko}(a, b) = 6$ és $\text{lkkt}(a, b) = 1260$.

2.13. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsuk, ha a k és n pozitív egészek relatív prímek és $k < n$, akkor n osztója $\binom{n}{k}$ -nak.

2.14. Feladat. (2 pt. előadta D. János)

Legyenek k és n pozitív egészek, $k < 2^n$. Bizonyítsuk, hogy $\binom{2^n}{k}$ páros.

2.15. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Legyenek a, m, n pozitív egészek. Bizonyítsuk, hogy

$$\text{lko}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{lko}(m, n)} - 1.$$

2.16. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Zsolt és D. János)

Határozzuk meg azon p prímeket, melyekre $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ négyzetszám.

2.17. Feladat. (2 pt.)

A 10^n szám osztói között legfeljebb hány olyan szám van, melyek között egyik sem osztója a másiknak?

2.18. Feladat. (2 pt. előadta D. Tamás)

Legyen $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$, ahol p_1, \dots, p_m páronként különböző prímek, és k_1, \dots, k_m pozitív egészek.

- (1) Határozzuk meg n osztóinak számát.
- (2) Mely n számokra páratlan az osztók száma?
- (3) Határozzuk meg n osztóinak szorzatát.

2.19. Feladat. (2 pt. előadta D. János)

Smaragdia köztársaság elnöke a nemzeti ünnep alkalmából amnesztiában részesíti a köztársaság top secret börtönének lakóit. A 256 bebörtönzött mindegyike magánzárkában tölti büntetését. Mind-egyik zárka az ajtaján elhelyezett egyetlen gomb megnyomásával nyitódik, illetve záródik. Kezdetben minden zárka ajtaja zárva van. Az elnök futárt küld azzal a paranccsal, hogy mind a 256 zárkaajtó gombját nyomja meg. A dolgot jobban meggondolva újabb futárt küld azzal, hogy minden második ajtó gombját nyomja meg. Majd küld egy következő futárt azzal, hogy nyomja meg minden harmadik ajtó gombját, és így tovább. Utoljára a 256-dik futár indul el azzal a paranccsal, hogy a 256-dik ajtó gombját nyomja meg. Végül pontosan azok a rabok kapnak amnesztiát, akik olyan zárkában laknak, melynek ajtaja az összes parancs végrehajtása után nyitva áll. Hány rab szabadul a nemzeti ünnep alkalmából?

2.20. Feladat. (2 pt.)

Legyen n pozitív egész, a_0, a_1, \dots, a_n egészek, és $a_n \geq 1$. Bizonyítsuk, hogy végtelen sok összetett szám van az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $x = 1, 2, \dots$, sorozatban.

3. KONGRUENCIÁK

3.1. Feladat. (2 pt.)

Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

- (1) $19x \equiv 73 \pmod{2005}$,

$$(2) 143x \equiv 221 \pmod{91}.$$

3.2. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás és N. Levente)

Legyen F_n a Fibonacci-sorozat n -edik tagja, és n tetszőleges pozitív egész.

$$(1) \text{ Mutassuk meg, hogy } F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

$$(2) \text{ Oldjuk meg az } F_{n-1}x \equiv 1 \pmod{F_n} \text{ kongruenciát.}$$

3.3. Feladat. (2 pt.)

Határozzuk meg, hogy milyen maradékot ad

$$(1) 13\text{-mal osztva a } 35^{600},$$

$$(2) 17\text{-tel osztva a } 19^{2007}?$$

3.4. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Határozzuk meg a következő számok utolsó két számjegyét: $39^{39^{3900}}$, $39^{39^{39}}$.

3.5. Feladat. (2 pt. előadta D. Tamás)

Igazoljuk, hogy tetszőleges p prímszámra

$$(1) p \mid a^{p^p} - a,$$

$$(2) p^2 \mid (2p - 1)! - p,$$

$$(3) p^p \mid (p^2 - 1)! - p^{p-1}.$$

3.6. Feladat. (2 pt. előadta N. Levente)

Igazoljuk, hogy tetszőleges p páratlan prímszámra és n pozitív egészre

$$\prod_{1 \leq k \leq p^n, p \nmid k} k \equiv -1 \pmod{p^n}.$$

3.7. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a egész számra és n pozitív egészre $n \mid a^n - a^{n-\varphi(n)}$.

3.8. Feladat. (2 pt.)

Igazoljuk, hogy bármely a egész számra $a^{561} \equiv a \pmod{561}$.

3.9. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás)

Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b egészek és p prím esetén, ha $a^p \equiv b^p \pmod{p}$, akkor $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

3.10. Feladat. (2 pt.)

Igazoljuk, hogy az $(n-1)! = n^k - 1$ diofantoszi egyenletnek az $(n, k) = (2, 1)$, $(3, 1)$ és $(5, 2)$ párokon kívül nincs más megoldása a pozitív egészek körében.

3.11. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Határozzuk meg azokat az pozitív egész n -eket, amelyekre $\varphi(n) \mid n$.

3.12. Feladat. (2 pt.)

Igazoljuk, hogy a $\varphi(n) = a$ egyenlet végtelen sok páros a pozitív egészre megoldhatatlan.

3.13. Feladat. (2 pt.)

Igazoljuk, hogy a $\varphi(n) = a$ egyenletnek rogzített a mellett csak véges sok megoldása van.

3.14. Feladat. (2 pt. volt az előadáson)

Igazoljuk, hogy $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$.

3.19. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Bizonyítsuk, hogy $2^{2^n} + 1$ prímosztói $2^{n+1}x + 1$ alakúak, ahol x pozitív egész.

3.20. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Bizonyítsuk, hogy bármely a pozitív egészre $n \mid \varphi(a^n - 1)$.

3.21. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Bizonyítsuk, hogy tetszőleges olyan páratlan p prím, amelyre az összes négyzetes nemmaradék primitív gyök, $2^{2^n} + 1$ alakú.

3.22. Feladat. (2 pt.)

Döntsük el, hogy megoldhatók-e az alábbi kongruenciák.

- (1) $x^2 \equiv 5 \pmod{73}$,
- (2) $x^2 \equiv 226 \pmod{563}$.

3.23. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Legyen p egy $2^n + 1$ alakú prím, ahol $n \geq 2$. Mutassuk meg, hogy

- (1) 3 négyzetes nemmaradék modulo p ,
- (2) 3 primitív gyök modulo p .

3.24. Feladat. (2 pt.)

Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat (indextáblázat használatával)

- (1) $x^2 \equiv 5 \pmod{73}$,
- (2) $x^{30} \equiv 14 \pmod{67}$,
- (3) $44x^{21} \equiv 53 \pmod{73}$.

3.25. Feladat. (2 pt.)

Legyen p prím és $S = \sum_{i=1}^{p-1} i^n$. Mutassuk meg, ha $p-1 \mid n$, akkor $S \equiv -1 \pmod{p}$, és $S \equiv 0 \pmod{p}$ különben.

3.26. Feladat. (2 pt.)

Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszert

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 13 \pmod{25} \\ 3x &\equiv 7 \pmod{4} \end{aligned}$$

3.27. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás)

Határozzuk meg a $17^{18^{19}}$ számnak az utolsó két számjegyét.

3.28. Feladat. (2 pt.)

Az x négyjegyű szám a bankkártyám PIN kódja. Elárulom, hogy $x^{275} \equiv 2 \pmod{4187}$. Hogyan lehetne ebből x -et kitalálni? (Elárulom, hogy $4187 = 53 \cdot 79$.)

3.29. Feladat. (2 pt.)

Számítsuk ki a $\left(\frac{103}{151}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználásával.

3.30. Feladat. (2 pt. előadta N. Levente)

Legzenek a és m relatív prím természetes számok. Az $\frac{1}{m}$ törtet a alapú számrendszerben felírva egy tiszta szakaszos végtelen a -ados törtet kapunk. Igazoljuk, hogy a szakasz hossza nem más, mint a rendje modulo m . (Például $a = 10$ és $m = 7$ esetén $\frac{1}{7}$ tízes számrendszerbeli felírása $0,142857$, vagyis a szakasz hossza 6, ami éppen 10 rendje modulo 7.)

3.31. Feladat. (2 pt.)

Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{(111^{50})}$?

3.32. Feladat. (2 pt.)

Igazoljuk a következő kongruenciákat tetszőleges p páratlan prímszám esetén:

- (1) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(p-1) \equiv -1 \pmod{p}$,
- (2) $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$,
- (3) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$.

3.33. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsuk be, hogy minden kettőnél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.

4. SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNYEK

Tetszőleges n pozitív egészre legyen $\tau(n)$ az n osztóinak száma, $\sigma(n)$ az n osztóinak összege, $\nu(n)$ az n prímosztóinak a száma, $\kappa(n)$ az n prímtényező felbontásában szereplő kitevők összege, valamint μ a Möbius-féle és φ az Euler-féle függvény.

4.1. Feladat. (2 pt.)

Igazoljuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$, amelyre $n > n_0$ esetén $\varphi(n) > n^{1-\varepsilon}$.

4.2. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás és Gy. Gergő)

Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes számra

$$\frac{n}{\nu(n) + 1} \leq \varphi(n) \leq n \leq \sigma(n) \leq n(\nu(n) + 1).$$

4.3. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Igazoljuk, hogy $2^{\nu(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\kappa(n)} \leq n$.

4.4. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $\text{Inkoa}, n = 1$, valamint M teljes maradékrendszer, illetve R redukált maradékrendszer modulo n . Igazoljuk, hogy

$$\sum_{x \in M} \left\{ \frac{ax + b}{n} \right\} = \frac{1}{2}(n - 1), \quad \sum_{x \in R} \left\{ \frac{ax}{n} \right\} = \frac{1}{2}\varphi(n).$$

4.5. Feladat. (2 pt.)

Milyen maradékot ad n -nel osztva egy modulo n redukált maradékrendszer elemeinek szorzata?

4.6. Feladat. (2 pt.)

Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert:

$$\begin{aligned} 15x &\equiv 27 \pmod{7}, \\ 18x &\equiv 14 \pmod{5}, \\ 6x &\equiv 12 \pmod{8}. \end{aligned}$$

4.7. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Bizonyítsuk be a következőket:

- (1) $\sum_{j=1}^n \mu(j) \left[\frac{n}{j} \right] = 1$.
- (2) $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\nu(n)}$.
- (3) Minden k pozitív egészhez van olyan n pozitív egész, amelyre $\mu(n+1) = \dots = \mu(n+k) = 0$.

4.8. Feladat. (2 pt.)

Keressünk példát olyan számelméleti függvényre, amely teljesen multiplikatív, de összegzési függvénye nem az.

4.9. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra)

Legyen f tetszőleges multiplikatív számelméleti függvény. Mutassuk meg, hogy

- (1) $\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p))$,
- (2) $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$,
- (3) $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(d) = (-1)^{\nu(n)}$.

4.10. Feladat. (2 pt.)

Határozzuk meg a $\mu, \varphi, id_{\mathbb{N}}$ függvények összegzési függvényét.

4.11. Feladat. (2 pt.)

Határozzuk meg a μ, τ, σ függvények megfordítási függvényét.

4.12. Feladat. (2 pt.)

Az f gyengén multiplikatív számelméleti függvényről tudjuk, hogy $f(3) = 2$, $f(5) = 7$, és $f(45) = 21$.

- (1) Határozzuk meg $F(45)$ értékét, ahol F jelöli az f összegzési függvényét.
- (2) Határozzuk meg $t(45)$ értékét, ahol t jelöli az f megfordítási függvényét.

4.13. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Zsolt, G. Tamás és Sz. Nóra)

Oldja meg az alábbi egyenleteket

- (1) $\varphi(2n) = n$,
- (2) $\varphi(n) = n - 2$,
- (3) $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$.

4.14. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg a $\varrho(n) = \frac{1}{n}$ számelméleti függvény összegzési függvényét, és írja fel rá a Möbius-féle inverziós formulát.

4.15. Feladat. (2 pt.)

Mutassuk meg, hogy minden páros tökéletes szám utolsó két számjegye 06, 28, 36, 56 vagy 96.

4.16. Feladat. (2 pt.)

Mutassuk meg, hogy minden n páratlan tökéletes számra

- (1) $n = s^2 p$ alakban írható fel, ahol p alkalmas prímszám és $p \equiv 1 \pmod{4}$.
- (2) $n \equiv 1 \pmod{12}$ vagy $n \equiv 9 \pmod{36}$.

4.17. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Zsolt)

Azt mondjuk, hogy az n természetes szám *hiányos*, ha $\sigma(n) < 2n$, és *bővelkedő*, ha $\sigma(n) > 2n$. Mutassuk meg, hogy

- (1) minden prímszám hiányos,
- (2) minden $n = p^\alpha q^\beta$ alakú szám hiányos, ahol p és q különböző páratlan prímszámok és $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$,
- (3) bővelkedő szám többszöröse is bővelkedő.

4.18. Feladat. (2 pt.)

Mutassuk meg, hogy az alábbi egyenlőtlenségeket:

- (1) $\frac{n^2}{2} < \sigma(n)\varphi(n) \leq n^2$,
- (2) $2n \leq \sigma(n) + \varphi(n)$.

4.19. Feladat. (2 pt. előadta N. Levente)

Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra

$$\tau(n^2) = |\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \text{lkkt}(a, b) = n\}|.$$

4.20. Feladat. (2 pt. előadta N. Levente)

Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $\sum_{d|n} \tau(d) \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \sigma(d)$.

4.21. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Zsolt)

Keressünk végtelen sok olyan $a \neq b$ számpárt, hogy a és b -nek, illetve $a+1$ és $b+1$ -nek is ugyan azok a prímosztói (például $a=2$ és $b=8$).

5. KOMPLEX SZÁMOK

5.1. Feladat. (2 pt.)

Ábrázolja a következő komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és adja meg a trigonometrikus, illetve kanonikus alakjukat.

- (1) $\frac{7}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}i$,
- (2) $-2 - 2i$,
- (3) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$,
- (4) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$.

5.2. Feladat. (2 pt.)

Milyen mértani alakzatot határoznak meg a Gauss-számsíkon azon komplex számok,

- (1) melyek abszolút értéke 2,
- (2) melyek argumentuma $\pi/6$?

5.3. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás)

Határozza meg két komplex szám egymáshoz viszonyított helyzetét a Gauss-számsíkon, ha

- (1) szorzatuk valós,
- (2) összegük valós,
- (3) hányadosuk valós,
- (4) különbségük valós.

5.4. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Adja meg a következő komplex számokat a kanonikus és trigonometrikus alakban: $(1+i)^3$, $(1+\sqrt{3}i)^{100}$, $i/(1-i)$, $(3+i)/(1-i)$, $(3+4i)^{-1}$, $1+i+i^2+i^3+\dots+i^{77}$, $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i})^{20}$.

5.5. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Végezze el az alábbi gyökvonásokat:

(1) $\sqrt{3-4i}$,

(2) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3+i}}}$.

5.6. Feladat. (2 pt. előadta N. Levente)

Fejezze ki $\sin 4\varphi$ és $\cos 5\varphi$ értékét $\sin \varphi$ és $\cos \varphi$ segítségével.

5.7. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Bizonyítsa, hogy

$$\sum_{j=1}^n \sin(jx) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

5.8. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Keresse meg az alábbi egyenletek összes megoldását:

(1) $z^2 = \bar{z}$

(2) $z^3 = -8$,

(3) $z^6 = 64$,

(4) $z^2 + 2iz = -i$.

5.9. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid és N. Levente)

Tetszőleges $n \geq 1$ esetre számolja ki az n -edik egységgyökök összegét és szorzatát.

5.10. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Jelölje E_n az n -edik egységgyökök halmazát. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $n, m \geq 1$ egészekre $E_n \cap E_m = E_{\text{lko}(n,m)}$.

5.11. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra)

Jelölje P_n az n -edik primitív egységgyökök halmazát. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $n, m \geq 1$ egészekre ha $\varepsilon \in P_n$, akkor $\varepsilon^m \in P_{\frac{n}{\text{lko}(n,m)}}$.

5.12. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $n \geq 1$ egészre $E_n = \bigcup_{d|n} P_d$, és azt, hogy az únió diszjunkt.

5.13. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Tetszőleges $n \geq 1$ esetre számolja ki az n -edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.

5.14. Feladat. (2 pt. előadta D. Tamás)

Mely ε egységgyökre lesz $1 + \varepsilon$ is egységgyök?

5.15. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Hogyan lehetne tetszőleges z, u komplex számokra a z^u hatványt értelmezni úgy, hogy a hatványozás szokásos azonosságai teljesüljenek? Számolja ki az i^i hatvány értékét.

6. ALGEBRAI STRUKTÚRÁK

6.1. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Legyen G tetszőleges csoport és $a, b \in G$. Mutassuk meg, hogy $o(a^{-1}ba) = o(b)$ és $o(ab) = o(ba)$.

6.2. Feladat. (2 pt. előadta M. Miklós)

Legyen G tetszőleges kommutatív csoport, a és b véges rendű elemek G -ben. Bizonyítsuk, hogy ekkor $o(ab) \mid \text{lkk}(o(a), o(b))$, továbbá, ha $\text{lko}(o(a), o(b)) = 1$, akkor $o(ab) = o(a)o(b)$ is teljesül.

6.3. Feladat. (2 pt.)

Mutassuk meg, hogy G kommutativitása nem hagyható el az előző állításban.

6.4. Feladat. (2 pt.)

Mutassuk meg, hogy egy véges G csoport pontosan akkor ciklikus, ha bármely $a, b \in G$ -re $o(a) = o(b)$ esetén $[a] = [b]$.

6.5. Feladat. (2 pt.)

Tetszőleges A halmazra definiáljuk

$$\text{Eq}_A = \{ \varrho \subseteq A \times A : \varrho \text{ ekvivalenciareláció} \}.$$

Döntse el, hogy az $(\text{Eq}_A; \cap)$ félcsoport egységelemes-e, és hogy minden elemnek létezik-e inverze?

6.6. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Adjon meg az $\{a, b, c\}$ halmazon olyan kétváltozós műveletet, mely

- (1) asszociatív, van egységeleme, de nincs minden elemnek inverze,
- (2) van egységeleme, minden elemnek van inverze, de nem asszociatív.

6.7. Feladat. (2 pt.)

Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadásra, illetve szorzásra nézve:

- (1) $\{2n : n \in \mathbb{Z}\}$,
- (2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- (3) \mathbb{Z}_{15} ,
- (4) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

6.8. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Csoport művelet táblázata-e az alábbi két művelet táblázat:

\circ	e	f	g	h
e	g	h	e	f
f	h	g	f	e
g	e	f	g	h
h	f	e	h	g

$*$	e	f	g	h
e	f	h	g	e
f	h	g	h	f
g	g	h	f	g
h	e	f	g	h

6.9. Feladat. (2 pt. előadta D. János)

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmaz a következő művelettel:

$$x \star y = \begin{cases} xy & \text{ha } x > 0, \\ x/y & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

6.10. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Legyen $(S; \cdot)$ olyan félcsoport, amelyben létezik bal oldali egységelem, azaz

$$(\exists e \in S)(\forall x \in S)(e \cdot x = x),$$

és minden elemnek van bal oldali inverze, azaz

$$(\forall x \in S)(\exists y \in S)(y \cdot x = e).$$

Bizonyítsa be, hogy $(S; \cdot)$ csoport.

6.11. Feladat. (2 pt.)

Jelölje $\mathcal{F} = A^A$ az A véges halmaz összes transzformációinak halmazát a leképezésszorítás művelettel.

Állapítsa meg, hogy $(\mathcal{F}; \circ)$

- (1) asszociatív-e,
- (2) kommutatív-e,
- (3) van-e egységeleme,
- (4) létezik-e minden elemnek balinverze,
- (5) létezik-e minden elemnek jobbinverze,
- (6) hány bal oldali illetve jobb oldali zéruseleme van.

6.12. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, illetve testet a szokásos összeadás és szorzás műveletekkel?

- (1) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$,
- (2) $\{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k\}$,
- (3) $\{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Z}\}$,
- (4) $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_4$,
- (5) $\{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$,

(6) $\{a/2^n \in \mathbb{R} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

6.13. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás)

Adjon meg olyan gyűrűt, amely

- (1) egységelemes, kommutatív, de nem zérusosztómentes,
- (2) egységelemes, zérusosztómentes, de nem kommutatív,
- (3) kommutatív, zérusosztómentes, de nem egységelemes.

6.14. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Bizonyítsa, hogy minden véges, legalább kételemű, kommutatív zérusosztómentes gyűrű test.

6.15. Feladat. (2 pt.)

Minden $\varphi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ leképezéshez keressen olyan $f \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomot, melynek polinomfüggvénye φ .

6.16. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Legyen T egy tetszőleges véges test. Határozzuk meg T elemeinek összegét $|T|$ függvényében.

6.17. Feladat. (2 pt.)

Legyen G tetszőleges csoport és $g \in G$ rögzített elem. Mutassuk meg, hogy a $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$, $k\varphi = g^k$ leképezés homomorfizmus (azaz tetszőleges $k, l \in \mathbb{Z}$ egészekre $(k+l)\varphi = (k\varphi)(l\varphi)$).

6.18. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Mutassuk meg, hogy $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ a szokásos mátrix összeadás és szorzás műveletekkel testet alkot.

6.19. Feladat. (2 pt.)

Igaz-e, hogy ha az $(A; \cdot)$ groupoid egységelemes, művelettáblázata Latin-négyzet, és teljesül benne az $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ azonosság, akkor $(A; \cdot)$ csoport?

7. INTEGRITÁSTARTOMÁNYOK

Az alábbi feladatokban legyen $\nu = \sqrt{3}i$, és $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

7.1. Feladat. (2 pt.)

Határozzuk meg a $D = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid b\}$ integritástartományban az egységeket és az irreducibilis elemeket. Mutassuk meg, hogy D euklideszi gyűrű.

7.2. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra és M. Miklós)

Igazoljuk, hogy ha egy euklideszi gyűrű a elemére $\|a\| = 1$, akkor a egység.

7.3. Feladat. (2 pt. előadta K. Dávid)

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}[x, y]$ integritástartomány nem euklideszi gyűrű.

7.4. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[\nu]$ integritástartományban teljesül a leszálló oszthatósági láncfeltétel, de $\mathbb{Z}[\nu]$ nem Gauss gyűrű.

7.5. Feladat. (2 pt. előadta D. Tamás és M. Miklós)

Bizonyítsuk, hogy $\mathbb{Z}[\omega]$ euklideszi gyűrű az $\|a + b\omega\| = a^2 - ab + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$, euklideszi normával.

7.6. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Adjuk meg $\mathbb{Z}[\omega]$ egységeit.

7.7. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Bizonyítsuk, hogy ha $d \in \mathbb{Z}[\omega]$ irreducibilis, akkor $\|d\|$ prím \mathbb{Z} -ben, vagy d egy \mathbb{Z} -beli prím asszociáltja $\mathbb{Z}[\omega]$ -ban. Ha $\|d\|$ \mathbb{Z} -beli prím, akkor d irreducibilis $\mathbb{Z}[\omega]$ -ban. Így ν irreducibilis $\mathbb{Z}[\omega]$ -ban.

7.8. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Lássuk be, hogy ν asszociáltjai $\mathbb{Z}[\omega]$ -ban: $\pm(1 - \omega), \pm(1 - \omega^2), \pm(\omega - \omega^2)$.

7.9. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra)

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[\omega] = \left\{ \frac{a+b\nu}{2} : a, b \in \mathbb{Z}, 2 \mid a-b \right\}$. Továbbá, tetszőleges $u \in \mathbb{Z}[\omega]$ -ra u kongruens a $\pm 1, 0$ számok egyikével modulo ν .

7.10. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra)

Bizonyítsuk, ha $u \in \mathbb{Z}[\omega]$ -ra $u \equiv \pm 1 \pmod{\nu}$, akkor $u^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$.

7.11. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[\omega]$ -ban, ha $u^3 + v^3 = z^3$, akkor $\nu \mid uvz$.

7.12. Feladat. (2 pt.)

Legyenek $u, v, z \in \mathbb{Z}[\omega]$ és legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Z}[\omega]$ -beli egységek. Lássuk be, hogy ha u, v, z, ν páronként relatív prímek, és $u^3 + \varepsilon_2 v^3 + \varepsilon_3 (\nu^r z)^3 = 0$, akkor $\varepsilon_2 = \pm 1$ és $r \geq 2$.

7.13. Feladat. (2 pt.)

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[\omega]$ -ban $u^3 + v^3 = (u+v)(u+\omega v)(u+\omega^2 v)$. Továbbá, ha u, v, z és ν páronként relatív prímek, $r \geq 2$, ε egység, és $u^3 + v^3 + \varepsilon (\nu^r z)^3 = 0$, akkor léteznek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ egységek, ν -höz és egymáshoz páronként relatív prím z_1, z_2, z_3 elemek $\mathbb{Z}[\omega]$ -ban úgy, hogy

$$u + v = \varepsilon_1 \nu^a z_1^3, \quad u + \omega v = \varepsilon_2 \nu^b z_2^3, \quad u + \omega^2 v = \varepsilon_3 \nu^c z_3^3,$$

ahol $a + b + c = 3r$, és az a, b, c kitevők közül pontosan kettő egyenlő 1-gyel.

7.14. Feladat. (2 pt.)

Az előző feladat feltételei mellett mutassuk meg, hogy vannak olyan α, β, γ egységek, melyekre $\alpha \nu^a z_1^3 + \beta \nu^b z_2^3 + \gamma \nu^c z_3^3 = 0$. Továbbá az általánosság megszorítása nélkül $a = b = 1$, és így valamely $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ egységekre és $r - 1 \geq 1$ -re $z_1^3 + \varepsilon_2 z_2^3 + \varepsilon_3 (\nu^{r-1} z_3)^3 = 0$.

7.15. Feladat. (2 pt.)

Mutassuk meg, hogy az $u^3 + v^3 = z^3$ egyenletnek nincs nemtriviális megoldása $\mathbb{Z}[\omega]$ -ban és így \mathbb{Z} -ben sincs.

8. POLINOMOK

8.1. Feladat. (2 pt.)

Maradékos osztás segítségével döntse el, hogy osztható-e az f polinom a g polinommal.

- (1) $f = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x - 1, g = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (2) $f = x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^7 - x^3 + x - 1, g = x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (3) $f = 7, g = 3 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (4) $f = x^3 + (3+i)x^2 + (2+3i)x + 2i, g = 2x + 2i \in \mathbb{C}[x]$,
- (5) $f = x^4 + 3x^3 + x^2 + 4, g = (x-3)^2 \in \mathbb{Z}_7[x]$,
- (6) $f = x^4 + 3x^3 + x^2 + 4, g = (x-3)^2 \in \mathbb{Z}_{11}[x]$.

8.2. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Milyen R gyűrűkre teljesül a következő feltétel?

- (1) $(\forall f, g \in R[x])(\deg fg = \deg f + \deg g)$.
- (2) $(\forall f, g \in R[x])(fg = gf)$.

8.3. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Számolja ki f és g polinomok legnagyobb közös osztóját:

- (1) $f = x^3 + x^2 + \bar{1}, g = x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (2) $f = x^2 - 2x + 1, g = x^3 - 3x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (3) $f = x^4 + x^3 + x + \bar{1}, g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

8.4. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Határozza meg az $fu + gv = h$ polinomegyenlet u, v általános megoldását az alábbi h polinomokra és az előző feladatban megadott f és g polinomokra.

- (1) $h = x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (2) $h = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (3) $h = x^2 + x \in \mathbb{Z}_5[x]$.

8.5. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg az alábbi f és g polinomok közös gyökeit, majd számítsa ki külön-külön f és g gyökeit.

- (1) $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \in \mathbb{R}[x]$,
- (2) $f = x^2 - 2x + 1, g = x^3 - 3x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

8.6. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Határozza meg a kételemű, illetve háromelemű test feletti összes irreducibilis első-, másod- és harmadfokú polinomot.

8.7. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Gyűrűt alkotnak-e

- (1) $\mathbb{C}[x]$ páros fokú polinomjai a 0 polinommal együtt,
- (2) $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb huszadfokú polinomjai.
- (3) $\mathbb{C}[x]$ elemei a szokásos összeadás, és a kompozícióra, mint szorzásra.

8.8. Feladat. (2 pt. előadta Sz. Nóra)

Igazolja, hogy ha R integritástartomány, akkor minden nem konstans $f \in R[x]$ polinom minden $c \in R$ értéket csak véges sok R -beli helyen vehet föl.

8.9. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Mely m pozitív egészekre van $\mathbb{Z}_m[x]$ -ben olyan nemnulla polinom, hogy gyökeinek száma nagyobb, mint foka?

8.10. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Adjon meg olyan f legfeljebb harmadfokú komplex együtthatós polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 15$ és $f(-1) = 0$.

8.11. Feladat. (2 pt. előadta D. János)

Létezik-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?

8.12. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Döntse el, hogy a következő polinomok irreducibilisek-e:

- (1) $3x - 2 \in \mathbb{C}[x]$,
- (2) $3x^2 + 2x + 10 \in \mathbb{C}[x]$,
- (3) $2x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{R}[x]$,
- (4) $3x^2 + 2x + 10 \in \mathbb{R}[x]$,
- (5) $3x^2 + 2x + 10 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (6) $2x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
- (7) $x^4 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$,
- (8) $x^5 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.

8.13. Feladat. (2 pt. előadta G. Tamás és D. Tamás)

A Horner-elrendezés segítségével számítsa ki az alábbi f polinomok helyettesítési értékét a megadott c helyen. Amennyiben c gyöke f -nek állapítsa meg azt is, hogy hányszoros.

- (1) $f = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ és $c = 1 + i$,
- (2) $f = x^4 - (1 + i)x^3 - (2 + 3i)x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ és $c = 1 - 2i$,
- (3) $f = \bar{2}x^6 + \bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{5} \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ és $c = \bar{7}$,
- (4) $f = x^5 + x^4 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ és $c = \bar{1}$.

8.14. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását a komplex, valós és racionális számok teste felett:

- (1) $x^8 - 16$,
- (2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
- (3) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,
- (4) $x^4 - 10x^2 + 1$.

8.15. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Hány darab valós együtthatós irreducibilis polinom szorzatára bomlik fel az $x^{2007} + 2007x + 2007$ polinom?

8.16. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Határozza meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és prímszorzattényező alakját $\mathbb{Q}[x]$ -ben:

- (1) $f = x^3 - x^2 - x - 2$,
- (2) $f = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$,
- (3) $f = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$,
- (4) $f = x^4 - x^3 + 2x + 1$,
- (5) $f = 5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$.

8.17. Feladat. (2 pt.)

Mely k, m, n kitevőkre teljesül, hogy $x^2 - x + 1 \mid x^{3k} - x^{3m+1} + x^{3n+2}$.

8.18. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Minden n, m pozitív egész számra adja meg az $x^n - 1$ és $x^m - 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

8.19. Feladat. (2 pt.)

Legyen T tetszőleges test. Mutassa meg, hogy $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ ahol $a_n, a_0 \neq 0$ akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n$ is az.

8.20. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ egészre az $n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ és $x^n - n x + n - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

8.21. Feladat. (2 pt.)

Keressen olyan $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, hogy

- (1) f' minden gyöke gyöke f -nek,
- (2) f' -nek van olyan gyöke amely gyöke f -nek, és olyan is, amely nem gyöke f -nek.

8.22. Feladat. (2 pt.)

Igaz-e tetszőleges K test, $a \in K$ és $f \in K[x]$ esetén, hogy

- (1) ha a többszörös gyöke f -nek, akkor a gyöke f' -nek,
- (2) ha a k -szoros gyöke f -nek, akkor a $(k-1)$ -szeres gyöke f' -nek?

8.23. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Tekintsük $f = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 \in \mathbb{C}[x]$ polinomot. A gyökök meghatározása nélkül adjon meg olyan $g \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amelynek minden gyöke egyszeres, és ugyanazok a gyökei, mint f -nek.

8.24. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg az alábbi komplex együtthatós polinomok többszörös gyökeit:

- (1) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$,
- (2) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$,
- (3) $x^6 - 5x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 12x + 4$.

8.25. Feladat. (2 pt. előadta D. Tamás)

Bizonyítsa be, hogy tetszőleges p prímszámra és $c \in \mathbb{Z}_p$ konstansra az $x^p + c \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom nem irreducibilis.

8.26. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa be, hogy tetszőleges p prímszámra $f_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1$ polinom irreducibilis \mathbb{Q} felett. Adja meg \bar{f}_p irreducibilis felbontását \mathbb{Z}_p felett.

8.27. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Tetszőleges p prímszám esetén adja meg az összes irreducibilis másodfokú polinom számát $\mathbb{Z}_p[x]$ -ben.

8.28. Feladat. (2 pt. előadta Gy. Gergő)

Keresse meg az összes olyan p prímszámot, amelyre az $x + \bar{2}$ polinom faktora az $x^4 + x^3 + x^2 - x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak.

8.29. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Bizonyítsa be, hogy különböző $\mathbb{Q}[x]$ -beli irreducibilis polinomoknak különböző komplex gyökei vannak. Ennek felhasználásával mutassa meg, hogy tetszőleges $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomra

- (1) ha $a + b\sqrt{2}$ gyöke f -nek ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, akkor $a - b\sqrt{2}$ is az,
- (2) ha $\sqrt[3]{24}$ gyöke f -nek, akkor $-\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^5}i$ is az.

8.30. Feladat. (2 pt.)

Oldja meg az alábbi harmadfokú egyenleteket a komplex számok halmazán:

- (1) $x^3 - 6x + 4 = 0$,
- (2) $x^3 + 9x - 26 = 0$,
- (3) $x^3 - 9x^2 + 18x + 28 = 0$.

8.31. Feladat. (2 pt.)

Oldja meg az alábbi negyedfokú egyenleteket a komplex számok halmazán (segítségül adott a kubikus rezolvens egy α gyöke):

- (1) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7 = 0$, $\alpha = 4$;
- (2) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$, $\alpha = 2$.

8.32. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Fejezze ki elemi szimmetrikus polinomokkal a következő szimmetrikus polinomokat:

- (1) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2x_1x_2x_3$,
- (2) $x_1^2x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^2$.

8.33. Feladat. (2 pt.)

Számítsa ki az $f = x^3 - 2x^2 + 1$ polinom gyökeinek k -adik hatványösszegét, ahol $k = 1, 2, 3, 4$.

8.34. Feladat. (2 pt.)

Legyenek x_1, x_2, x_3, x_4 az $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei \mathbb{C} -ben. Határozza meg

$$g = (x - (x_1x_2 + x_3x_4))(x - (x_1x_3 + x_2x_4))(x - (x_1x_4 + x_2x_3))$$

polinom együtthatóit.

8.35. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy $\mathbb{Q}[x, y]$ Gauss gyűrű, de nem euklideszi gyűrű.

8.36. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

A alábbi $\mathbb{Q}[x, y]$ -beli polinomokat állítsa elő irreducibilis polinomok szorzataként.

- (1) $f = 5xy^7 + 3xy^6 + 2y + 1$,
- (2) $f = x^3y^6 + y^5 + x^4y + x$,
- (3) $f = y^5x^3 + (1 - 3y^5)x^2 + 3y^5x + y^7 - y^5 - 1$.

8.37. Feladat. (2 pt. közösen megbeszéltük)

Jelölje $\mathbb{Q}(x)$ a $\mathbb{Q}[x]$ hányadostestét. Vegye észre, hogy $\mathbb{Q}(x)$ vektortér \mathbb{Q} felett, és adja meg $\mathbb{Q}(x)$ egy \mathbb{Q} feletti bázisát.

8.38. Feladat. (2 pt.)

Egy komplex szám algebrai egész, ha gyöke egy $\mathbb{Z}[x]$ -beli főpolinomnak.

- (1) Mutassa meg, hogy az algebrai egészek az algebrai számok testének egy részgyűrűjét alkotják.
- (2) Bizonyítsa, hogy minden $r \in \mathbb{C}$ algebrai számhoz van olyan nemnulla $a \in \mathbb{Z}$, hogy ra algebrai egész.
- (3) Határozza meg a \mathbb{Q} -beli algebrai egészek gyűrűjét.
- (4) Határozza meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i) = \{a + b\sqrt{3}i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ -beli algebrai egészek gyűrűjét.

9. VÉGES TESTEK

9.1. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy teszőleges p -karakterisztikájú véges test bármely eleme p -dik hatványa a test valamely elemének.

9.2. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy K véges test feletti irreducibilis polinomnak nincs többszörös gyöke K semilyen L bővítésében.

9.3. Feladat. (2 pt.)

Adjon meg olyan p -karakterisztikájú K testet és $f \in K[x]$ irreducibilis polinomot úgy, hogy f -nek van többszörös gyöke K valamely bővítésében.

9.4. Feladat. (2 pt.)

Lehet-e véges test algebrailag zárt?

9.5. Feladat. (2 pt.)

Tekintsük a $K = (\{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{Z}_3\}; +, \cdot)$ huszonhét elemű testet, ahol $+$ és \cdot műveleteket modulo $x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ értjük. Határozza meg a $2x^2$ és $x^2 + x + 1$ elemek összegét, szorzatát és inverzét K -ban.

9.6. Feladat. (2 pt.)

Van-e gyöke $3x^2 + 2x - 3$ polinomnak a 121 elemű testben?

9.7. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa, hogy véges test tetszőleges eleme két elem négyzetének összege.

9.8. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy $x^{p^n} - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom \mathbb{Z}_p feletti felbontási teste egy p^n elemű test.

9.9. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy \mathbb{Z}_p felett minden pozitív n egészre létezik n -ed fokú irreducibilis polinom.

9.10. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy tetszőleges $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ -beli irreducibilis polinomra $\deg f \mid n$ pontosan akkor teljesül, ha $f \mid x^{p^n} - x$.

9.11. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa, hogy $x^{p^n} - x = \prod f$, ahol f végig fut azokon a $\mathbb{Z}_p[x]$ -beli irreducibilis főpolinomokon, melyekre $\deg f \mid n$. Továbbá, $p^n = \sum_{d \mid n} da_d$, ahol a_d a \mathbb{Z}_p feletti d -ed fokú irreducibilis főpolinomok száma.

9.12. Feladat. (2 pt.)

Határozza meg a \mathbb{Z}_p feletti n -ed fokú irreducibilis polinomok számát.

9.13. Feladat. (2 pt.)

Legyen K tetszőleges test, $f \in K[x]$ és a az f gyöke K valamely bővítésében. Bizonyítsa, hogy f pontosan akkor irreducibilis K fölött, ha $\deg f$ megegyezik $K(a)$ test K feletti dimenziójával.

9.14. Feladat. (2 pt.)

Legyen K véges test, $a \in K$ generátoreleme K multiplikatív csoportjának. Bizonyítsa, hogy $x^{|K|-1} - a$ irreducibilis K felett.

9.15. Feladat. (2 pt.)

Dirichlet számtani sorozatokra vonatkozó tételét felhasználva mutassa meg, hogy minden pozitív n egészhez van olyan p prím és $a \in \mathbb{Z}_p$, hogy $x^n - a$ irreducibilis.

9.16. Feladat. (2 pt.)

Legyen p tetszőleges prím. Bizonyítsa, hogy bármely n esetén, ha $p \nmid n$, akkor létezik egy K p^m -elemű test és $a \in K$ úgy, hogy $x^n - a$ irreducibilis K felett.

9.17. Feladat. (2 pt.)

Legyen K tetszőleges véges test. Mely n -ekre áll elő K bármely eleme valamely K -beli elem n -dik hatványaként?

9.18. Feladat. (2 pt.)

Legyen K tetszőleges test. Azt mondjuk, hogy $\varepsilon \in K$ n -edik egységgyök, ha ε gyöke az $x^n - 1$ polinomnak. Az ε egységgyök primitív n -edik egységgyök, ha rendje n a K multiplikatív csoportjában. Mutassa meg, hogy ha $\text{char}(K) \nmid n$, akkor K valamely bővítése tartalmaz primitív n -edik egységgyököt. Mi a helyzet, akkor ha $\text{char}(K) \mid n$?

9.19. Feladat. (2 pt.)

Legyen K olyan test, amely tartalmaz primitív n -edik egységgyököt. Jelölje P_n a K -beli primitív n -edik egységgyökök halmazát. Tekintsük az $f_n = \prod_{\varepsilon \in P_n} (x - \varepsilon)$ (ú.n. n -edik körosztási) polinomot $K[x]$ -ben. Bizonyítsa, hogy f_n a K prímteste fölötti polinom. Továbbá, $f_n = \prod_{d \mid n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$.

9.20. Feladat. (2 pt.)

Legyen $p \nmid n$ prím. Legyen ε primitív n -edik egységgyök \mathbb{Z}_p valamely bővítésében. Bizonyítsa, hogy $\mathbb{Z}_p(\varepsilon)$ dimenziója \mathbb{Z}_p felett megegyezik p modulo n rendjével. Keressen olyan n -t és $p \nmid n$ prímet, amelyre f_n reducibilis \mathbb{Z}_p felett.

9.21. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa, hogy K véges test alaphalmazán értelmezett tetszőleges n -változós művelet K feletti polinomfüggvény.

9.22. Feladat. (2 pt.)

Bizonyítsa Minkowski tételét: Legyen adott egy paralellogrammarács a síkon T területű alapparalellogrammával, valamint egy S origó középpontú centrálisan szimmetrikus, konvex síkidom, melynek területe nagyobb, mint $4T$. Ekkor S tartalmaz az origótól különböző rácspontot.

9.23. Feladat. (2 pt.)

Minkowski tételét felhasználva bizonyítsa, hogy bármely $3k + 1$ alakú prímszám felírható $a^2 + 3b^2$ alakban, ahol a, b egészek.

9.24. Feladat. (2 pt.)

Mutassa meg, hogy $\mathbb{Z}(\omega)$ irreducibilis elemei asszociáltságtól eltekintve a következők:

- ν ,
- a $3k - 1$ alakú \mathbb{Z} -beli prímek,
- a $3k + 1$ alakú \mathbb{Z} -beli prímek $a + b\nu$ alakú osztói, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ és $3k + 1 = a^2 + 3b^2$.