Lineáris leképezések

(előadásvázlat, 2008. március 11.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: homogén lineáris egyenletrendszer és annak megoldásaltere, vektorterek izomorfizmusa és automorfizmusa, bázisátmenet mátrixa.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.
- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.

1. Definíció. Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. A $\varphi : U \to V$ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük (vagy vektortér homomorfizmusnak), ha bármely $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén

$$(u+v)\varphi = u\varphi + v\varphi \quad \text{és} \quad (\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi).$$

Az U-ból V-be menő lineáris leképezések halmazát $\operatorname{Hom}(U,V)$ jelöli. Az U-ból U-ba menő lineáris leképezéseket lineáris transzformációknak nevezzük. A bijektív lineáris leképezések a vektortér izomorfizmusok, továbbá a bijektív lineáris transzformációk a vektortér automorfizmusok.

2. Definíció. Legyen $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ lineáris leképezés. A

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\, u \in U : u\varphi = 0 \,\},$$
$$\operatorname{Im}\varphi = \{\, u\varphi : u \in U \,\}$$

halmazokat rendre a φ lineáris leképezés magjának, illetve képterének nevezzük.

3. Tétel. *Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. Tetszőleges $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ lineáris leképezésre érvényesek a következők:*

(1) $0\varphi = 0$,
(2) $\operatorname{Ker}\varphi$ *altér U-ban,*
(3) $\operatorname{Im}\varphi$ *altér V-ben,*
(4) φ *akkor és csak akkor injektív, ha* $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$,
(5) *Ha $u_1, \dots, u_k$ generátorrendszer U-ban, akkor $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ generátorrendszer az* $\operatorname{Im}\varphi$ *képtérben.*
(6) *Ha $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ lineárisan független vektorrendszer V-ben, akkor $u_1, \dots, u_k$ lineárisan független U-ban.*

4. Tétel (Lineáris leképezések dimenziótétele). *Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér, és $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$. Ha U végesdimenziós, akkor*

$$\dim(U) = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

5. Következmény. *Végesdimenziós vektortér lineáris transzformációja akkor és csak akkor injektív, ha szürjektív.*

6. Következmény. *Legyen T test, $m, n \geq 1$ és $A \in T^{m\times n}$. Az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterének dimenziója (azaz a szabad változók száma) $n - r(A)$.*

7. Tétel. *Ha V a T test feletti n-dimenziós vektortér, akkor V izomorf a T^n vektortérrel. Tehát bármely két T-feletti n-dimenziós vektortér izomorf egymással.*

8. Definíció. Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek. A $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ lineáris leképezések összegén, illetve a φ leképezés $c \in T$ skalárral való szorzatán azt a $\varphi + \psi : U \to V$, illetve $c\varphi : U \to V$ leképezéseket értjük, amelyekre

$$u(\varphi+\psi) = u\varphi + u\psi, \qquad u(c\varphi) = c(u\varphi) \qquad \text{minden } u \in U \text{ esetén.}$$

9. Tétel. *Tetszőleges U és V ugyanazon T test feletti vektorterek esetén* $\mathrm{Hom}(U,V)$ *a fent definiált műveletekkel vektorteret alkot T felett.*

10. Tétel. *Tetszőleges U, V és W ugyanazon T test feletti vektorterekre érvényesek a következők:*

(1) *Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ és $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, akkor $\varphi\psi \in \mathrm{Hom}(U,W)$.*
(2) *Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ bijektív, akkor $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(V,U)$.*
(3) *Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ és $c \in T$, akkor $c(\varphi\psi) = (c\varphi)\psi = \varphi(c\psi)$.*
(4) *Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ és $\tau \in \mathrm{Hom}(V,W)$, akkor $(\varphi+\psi)\tau = \varphi\tau + \psi\tau$.*
(5) *Ha $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ és $\psi, \tau \in \mathrm{Hom}(V,W)$, akkor $\varphi(\psi+\tau) = \varphi\psi + \varphi\tau$.*

11. Tétel. *Legyen U végesdimenziós, V pedig tetszőleges ugyanazon T test feletti vektortér, $e_1, \ldots, e_n \in U$ bázis és $v_1, \ldots, v_n \in V$ tetszőleges vektorrendszer. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezés, amelyre*

$$e_1\varphi = v_1, e_2\varphi = v_2, \ldots, e_n\varphi = v_n.$$

12. Definíció. Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_n \in V$ bázisokkal. Tetszőleges $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezésre léteznek olyan egyértelműen meghatározott $a_{i,j} \in T$ skalárok, hogy

$$e_i\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j \qquad \text{minden } i = 1, \ldots, m \text{ esetén.}$$

Az $(a_{i,j})_{m\times n}$ mátrixot a φ lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban megadott mátrixának nevezzük.

13. Tétel. *Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_n \in V$ bázisokkal, továbbá legyen $A \in T^{m\times n}$ a $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban megadott mátrixa. Ha az $u \in U$ vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban $x = (x_1, \ldots, x_m)$, akkor az $u\varphi \in V$ vektor koordinátasora az $\mathcal{F}$ bázisban xA.*

14. Tétel. *Legyenek $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ rendre az U, V és W ugyanazon T test feletti végesdimenziós vektorterek bázisai. Legyen A és B rendre a $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezések mátrixai az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban, illetve C a $\tau \in \mathrm{Hom}(V,W)$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ bázisokban, és legyen $c \in T$. Ekkor*

(1) *$A + B$ a $\varphi + \psi$ lineáris leképzés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban,*
(2) *cA a $c\varphi$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban,*
(3) *AC a $\varphi\tau$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{G}$ bázisokban.*

15. Következmény. *Ha U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a T test felett, akkor a lineáris leképezések* $\mathrm{Hom}(U,V)$ *vektortere izomorf az $m \times n$-es mátrixok $T^{m\times n}$ vektorterével, és így mn dimenziós.*

16. Definíció. Legyen $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_m$ és $\mathcal{E}' : e'_1, \ldots, e'_m$ a T test feletti U vektortér két bázisa. Az $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(U,U)$ identikus lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ bázisokban megadott mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.

17. Tétel. *Legyen a T test feletti U vektortér két bázisa $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$, továbbá legyen P az áttérés mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra. Ekkor P nemelfajuló mátrix, továbbá az $\mathcal{E}'$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrixa P^{-1}.*

18. Tétel. *Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ az U, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ pedig a V vektortér bázisa. Jelölje P, illetve S az áttérés mátrixát $\mathcal{E}$-ről $\mathcal{E}'$-re, illetve $\mathcal{F}$-ről $\mathcal{F}'$-re. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezés, és legyen φ mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban A. Ekkor φ mátrixa az $\mathcal{E}'$ és $\mathcal{F}'$ bázisokban $P^{-1}AS$.*

19. Definíció. Legyen T test és n pozitív egész. Az $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok hasonlók, ha létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{n\times n}$ mátrix, hogy $A = P^{-1}BP$.

20. Következmény. *Ugyanazon lineáris transzformáció két különböző bázisban felírt mátrixa hasonló.*

21. Definíció. A φ lineáris leképezés rangján a képterének dimenzióját értjük, azaz $r(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi)$.

22. Tétel. *Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangja megegyezik valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangjával.*

23. Következmény. *Legyen φ lineáris transzformáció valamely végesdimenziós vektortérben. Ekkor φ akkor és csak akkor bijektív, ha valamely (bármely) bázisbeli mátrixa nemelfajuló.*

24. Tétel. *Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektorterek ugyanazon T test fölött, és $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Ekkor φ mátrixa az U és V egy-egy alkalmas bázisában*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T^{m\times n},$$

ahol r a φ rangja, E_r az $r \times r$ méretű egységmátrix, és a zérók a megfelelő méretű zérómátrixok.

25. Következmény. *Legyen T tetszőleges test. Ekkor minden $A \in T^{m\times n}$ mátrixhoz létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{m\times m}$ és $Q \in T^{n\times n}$ mátrixok, hogy*

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol r az A mátrix rangja, és a jobboldalon álló mátrix ugyanaz, mint az előző tételben.

26. Definíció. Legyen T test, V vektortér T felett, és $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, V)$. A $\lambda \in T$ skalár a φ lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $v \in V$ vektor, hogy $v\varphi = \lambda v$. A

$$\{\, v \in V : v\varphi = \lambda v \,\}$$

alteret a $\lambda \in T$ skalárhoz tartozó sajátaltérnek nevezzük. A nemnulla $v \in V$ vektor a φ lineáris transzformáció sajátvektora, ha valamely sajátaltérben benne van, azaz létezik olyan $\lambda \in T$, hogy $v\varphi = \lambda v$.

27. Definíció. Legyen T test, n pozitív egész. Az $A \in T^{n\times n}$ mátrix sajátértéke, sajátaltere és sajátvektora rendre a $\varphi : T^n \to T^n$, $x \mapsto xA$ lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltere, illetve sajátvektora. Azaz $\lambda \in T$ és $x \in T^n$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor pár, ha $xA = \lambda x$.

28. Tétel. *Legyen V n-dimenziós vektortér a T test felett, $e_1, \ldots, e_n$ bázis V-ben, $\varphi \in \operatorname{Hom}(T^n, T^n)$ és $A \in T^{n\times n}$ a φ lineáris transzformáció mátrixa az $e_1, \ldots, e_n$ bázisban. Ekkor $\lambda \in T$ és $v \in V$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor párja φ-nek, ha λ és v koordinátasora sajátérték, sajátvektor párja A-nak.*

29. Tétel. *Legyen U tetszőleges vektortér a T test felett, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T$ páronként különböző sajátértékei a $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, U)$ lineáris transzformációnak, és $U_1, \ldots, U_k$ pedig ezen sajátértékekhez tartozó sajátalterek. Ha $U_1 + \cdots + U_k = U$, akkor φ egyértelműen meghatározott.*

30. Definíció. Az $A \in T^{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja az

$$f_A(x) = |A - xE|$$

determinánssal megadott T-feletti polinom. Az $f_A(x)$ polinom T-be eső gyökeit az A mátrix karakterisztikus gyökeinek nevezzük.

31. Tétel. *Legyen T test. A $\lambda \in T$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke az $A \in T^{n\times n}$ mátrixnak, ha λ karakterisztikus gyöke A-nak.*

32. Tétel. *Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.*

33. Definíció. Véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjának karakterisztikus polinomja a lineáris transzformáció valamely (bármely) bázisban felírt mátrixának karakterisztikus polinomja.