Lineáris algebra és a rang fogalma

(előadásvázlat, 2008. május 29.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni:

(1) A mátrixalgebrával kapcsolatban: számtest feletti mátrixok fogalma, mátrixok képlettel való megadása, műveletek mátrixokkal és azok elemi tulajdonságai, trianguláris mátrixok.

(2) A determinánsokkal kapcsolatban: a determináns fogalma, kifejtési tételek, a determinánsok elemi tulajdonságai, a dualitás elve, a determinánsok szorzástétele, trianguláris mátrixok determinánsa, mátrix inverzének kiszámítása determinánssal, Vandermonde-determináns, elfajuló mátrix.

(3) A lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatban: a lineáris egyenletrendszer fogalma, egyenletrendszerek mátrixos alakja, bővített mátrix, lépcsős alakú egyenletrendszerek, kötött és szabad változók, elemi sorátalakítások, Gauss-elimináció, Cramer-szabály, mátrixok determinánsának és inverzének kiszámolása elemi sorátalakításokkal.

(4) Az absztrakt vektorterekkel kapcsolatban: számtest feletti vektortér fogalma, a fontos példák ismerete (T^n, $T^{\mathbb{N}}$, $T^{m\times n}$, $T[x]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{Q}$ felett) nullvektor, műveletek vektorokkal és azok elemi tulajdonságai, vektorterek izomorfizmusa, altér fogalma, triviális alterek, homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere, lineáris kombináció, triviális lineáris kombináció, feszített (generált) altér, alterek összege és metszete, az alterek hálója,

(5) Vektorrendszerekkel kapcsolatban: a vektorrendszer fogalma, lineárisan független és függő vektorrendszerek, maximális lineárisan független vektorrendszer, generátorrendszer, minimális generátorrendszer, végesdimenziós vektortér, bázis, standard bázis, vektor koordinátái, kicserélési tétel, dimenzió fogalma, azonos dimenziós vektorterek izomorfak.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.

1. Tétel. *Legyen T test, és $A = (a_{i,j}) \in T^{n\times n}$ tetszőleges négyzetes mátrix. Ekkor*

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1,1\sigma}\cdot a_{2,2\sigma}\cdots a_{n,n\sigma}.$$

2. Példa. $n = 2$ esetén:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(\mathrm{id})\cdot a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}((1\ 2))\cdot a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n = 3$ esetén:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(\mathrm{id})\cdot a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}((1\ 2))\cdot a_{12}a_{21}a_{33} + \operatorname{sgn}((1\ 3))\cdot a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad + \operatorname{sgn}((2\ 3))\cdot a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sgn}((1\ 2\ 3))\cdot a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn}((1\ 3\ 2))\cdot a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32},\end{aligned}$$

ami éppen a Sarrus-szabály.

3. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak tetszőleges T testre?

(1) $|A| \geq 0$ tetszőleges $A \in T^{n\times n}$ mátrixra.
(2) Tetszőleges $A \in T^{n\times n}$ mátrixra $|A| \in T$.
(3) Ha $A \in T^{n\times k}$ és $B \in T^{k\times m}$, akkor $AB \in \mathbb{C}^{n\times m}$.
(4) Ha $A \in T^{n\times n}$ és $B \in T^{n\times n}$, akkor $|AB| = |A| \cdot |B|$.
(5) Ha $A \in T^{n\times n}$ és $B \in T^{n\times n}$, akkor $|A + B| = |A| + |B|$.
(6) Ha $A \in T^{n\times n}$ és $\lambda \in T$, akkor $|\lambda T| = \lambda|T|$.
(7) Ha az $A \in T^{n\times n}$ mátrix valamely oszlopában csupa nulla elem van, akkor $|A| = 0$.
(8) Ha $A \in T^{n\times n}$ trianguláris, akkor $|A|$ a főátlón elhelyezkedő elemek szorzata.
(9) Az $A \in T^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $|A| \neq 0$.

4. Példa. $\mathbb{C}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett. Az $1, i$ minimális generátorrendszer, tehát $\mathbb{C}$ dimenziója 2, azaz $\mathbb{C}$ izomorf $\mathbb{R}^2$-tel mint vektortér (de természetesen nem mint test).

5. Definíció. Az S halmazt a $(T; +, \cdot)$ test résztestjének nevezzük, ha

(1) $\emptyset \neq S \subseteq T$, (nemüres részhalmaz)
(2) $(\forall x, y \in S)(x + y,\ x \cdot y \in S)$, (zárt T műveleteire),
(3) $(S; +, \cdot)$ test, (testet alkot T műveletek megszorításával).

6. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

(1) $\mathbb{Z}$ test.
(2) $\mathbb{Q}$ test.
(3) $\mathbb{R}$ test.
(4) $\mathbb{C}$ test.
(5) A valós függvények $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ halmaza test.
(6) $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
(7) $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathbb{R}$ felett.
(8) $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathbb{C}$ felett.
(9) A valós függvények $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ halmaza vektorteret alkot $\mathbb{R}$ felett.

7. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

(1) $\mathbb{Q}$ 1-dimenziós vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
(2) $\mathbb{R}$ 2-dimenziós vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
(3) $\mathbb{C}$ 4-dimenziós vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
(4) $\mathbb{R}$ 1-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett.
(5) $\mathbb{C}$ 2-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett.
(6) $\mathbb{R}$ végesdimenziós vektortér $\mathbb{Q}$ felett.
(7) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 2-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett.
(8) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 4-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett.

8. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

(1) Az $(1, 0)$, $(0, 1)$ vektorrendszer bázis az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^2$ vektortérben.
(2) Az $(1, 0)$, $(0, 1)$ vektorrendszer bázis az $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}^2$ vektortérben.
(3) A 2 vektorrendszer bázis a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{Q}$ vektortérben.
(4) Az 1 vektorrendszer bázis a $\mathbb{C}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben.
(5) Az $2, -i$ vektorrendszer bázis a $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben.
(6) Az $1, \sqrt{2}$ vektorrendszer független a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben.
(7) Az $1, \sqrt{2}$ vektorrendszer generátorrendszer a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{R}$ vektortérben.
(8) Az $1, i$ vektorrendszer bázis a $\mathbb{C}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben.

9. Tétel (Alterek dimenziótétele). *Ha U és V végesdimenziós altér valamely vektortérben, akkor $U \cap V$ és $U + V$ is végesdimenziós, és*

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V).$$

10. Példa. Az $\mathbb{R}^4$ vektortérben megadjuk az $(1,1,2,-1)$, $(-2,1,0,1)$ és $(-3,3,2,1)$ vektorok által generált alteret elemeinek megadásával. Tudjuk, hogy a generált U altér ezen vektorok lineáris kombinációja, azaz

$$U = \{\, x_1 \cdot (1,1,2,-1) + x_2 \cdot (-2,1,0,1) + x_3 \cdot (-3,3,2,1) : x_1, x_2, x_3 \in R\,\}.$$

Tehát a $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in R^4$ vektor akkor és csak akkor eleme U-nak, ha az

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszernek van megoldása az $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektorra nézve. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a Gauss-elimináció segítségével megoldjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & b_1 \\ 1 & 1 & 3 & b_2 \\ 2 & 0 & 2 & b_3 \\ -1 & 1 & 1 & b_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & b_1 \\ 0 & 3 & 6 & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & 8 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & b_4 + b_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - b_1 + 3(b_4 + b_1) \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 + 4(b_4 + b_1) \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & b_4 + b_1 \end{array}\right)$$

Nem végeztük el a Gauss-elimináció minden lépését, mert a bekeretezett elemeket tartalmazó sorokat nem szoroztuk be egy olyan konstanssal, hogy a bekeretezett elemek mindegyike 1 legyen, másrészt sorcserékkel nem hoztuk a mátrixot lépcsős alakra.

A kapott bővített mátrixról már látjuk, hogy x_1 és x_2 kötött változók (mert az első és második oszlopban vannak a kitüntetett elemeink), és az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 - 3(b_4 + b_1) = -2b_1 - 3b_4, \quad \text{és} \\ b_3 &= 2b_1 - 4(b_4 + b_1) = -2b_1 - 4b_4. \end{aligned}$$

Tehát azt mutattuk meg, hogy

$$U = \{\, (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) : b_1, b_4 \in \mathbb{R}\,\}.$$

Ellenőrzésképp megnézzük, hogy a generáló vektorok tényleg ebben az altérben vannak. Az $(1,1,2,-1)$ vektor esetén $b_1 = 1$ és $b_4 = -1$, tehát $-2b_1 - 3b_4 = -2\cdot 1 - 3\cdot(-1) = -2+3 = 1$ és $-2b_1 - 4b_4 = -2\cdot 1 - 4\cdot(-1) = -2+4 = 2$, ami éppen a helyes érték. Hasonlóan $(-2,1,0,1)$-re $-2\cdot(-2) - 3\cdot 1 = 4-3 = 1$ és $-2\cdot(-2) - 4\cdot 1 = 4-4 = 0$. Végezetül a $(-3,3,2,1)$ vektorra $-2\cdot(-3) - 3\cdot 1 = 6-3 = 3$ és $-2\cdot(-3) - 4\cdot 1 = 6-4 = 2$.

11. Példa. Az előbbi példa U alterének az

$$U = \{\, (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) : b_1, b_4 \in \mathbb{R}\,\}.$$

képlettel való megadásából nagyon sok hasznos információra következtethetünk. Először is, U kétdimenziós mert b_1 és b_4 szabadon választható, és egy bázisát úgy nyerhetjük, hogy a

$$\begin{aligned} b_1 = 1, b_4 = 0 \text{ esetén } (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) &= (1, -2, -2, 0), \text{ és} \\ b_1 = 0, b_4 = 1 \text{ esetén } (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) &= (0, -3, -4, 1), \end{aligned}$$

azaz az $(1,-2,-2,0)$, $(0,-3,-4,1)$ vektorrendszer bázisa U-nak. Az is könnyen látható, hogy a $(0,1,0,0)$ és $(0,0,1,0)$ vektorok nincsenek az U altérben, és olyan W alteret generálnak, amelyre $U \cap W = \{0\}$ és $U + W = \mathbb{R}^4$ (egy ilyen W alteret az U komplementumának hívjuk). Vegyük észre, hogy teljesül az alterek dimenziótétele, mert $\dim(U) = 2$, $\dim(W) = 2$, $\dim(U \cap W) = 0$ és $\dim(U + W) = 4$.

12. Példa. Tekintsük a $(0,3,1,-1)$ és $(1,-5,-9,1)$ vektorok által generált V alteret az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, és adjuk meg a 10 példához hasonlóan a V elemeit képlet segítségével. A megfelelő egyenletrendszer bővített mátrixa és annak Gauss-féle eliminációval való átalakítása:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & c_1 \\ 3 & -5 & c_2 \\ \boxed{1} & -9 & c_3 \\ -1 & 1 & c_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{1} & c_1 \\ 0 & 22 & c_2 - 3c_3 \\ 1 & -9 & c_3 \\ 0 & -8 & c_4 + c_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{1} & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 - 3c_3 - 22c_1 \\ \boxed{1} & -9 & c_3 \\ 0 & 0 & c_4 + c_3 + 8c_1 \end{array}\right).$$

Azt kaptuk tehát, hogy az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $c_2 - 3c_3 - 22c_1 = 0$ és $c_4 + c_3 + 8c_1 = 0$. Tehát a V altér elemeinek képlettel való megadása

$$V = \{\, (c_1, 3c_3 + 22c_1, c_3, -c_3 - 8c_1) : c_1, c_3 \in \mathbb{R} \,\}.$$

13. Példa. A 10 és 12 példákat azért oldottuk meg, hogy az ott kiszámított eredmények felhasználásával az U és V alterek metszetét kiszámítsuk. Eddig tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} U &= \{\, (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) : b_1, b_4 \in \mathbb{R} \,\}, \text{ és} \\ V &= \{\, (c_1, 3c_3 + 22c_1, c_3, -c_3 - 8c_1) : c_1, c_3 \in \mathbb{R} \,\}. \end{aligned}$$

Tehát ha veszünk egy közös vektort a két altérből, akkor

$$(b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) = (c_1, 3c_3 + 22c_1, c_3, -c_3 - 8c_1),$$

azaz

$$\begin{aligned} b_1 &= c_1, \\ -2b_1 - 3b_4 &= 3c_3 + 22c_1, \\ -2b_1 - 4b_4 &= c_3, \\ b_4 &= -c_3 - 8c_1. \end{aligned}$$

Ez megint csak egy (homogén) lineáris egyenletrendszer, amit sokféle módszerrel meg tudunk oldani, pl. Gauss-eliminációval. Most csak a jól bevált középiskolás módszert alkalmazzuk: c_1 és c_3-at kifejezzük b_1 és b_4 segítségével, és kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -2b_1 - 3b_4 &= 3(-2b_1 - 4b_4) + 22b_1 = 16b_1 - 12b_4, \\ b_4 &= -(-2b_1 - 4b_4) - 8b_1 = -6b_1 + 4b_4. \end{aligned}$$

Átrendezzük:

$$\begin{aligned} 9b_4 &= 18b_1, \\ -3b_4 &= -6b_1, \end{aligned}$$

amelynek megoldása éppen $b_4 = 2b_1$, ahol b_1 tetszőleges szám lehet. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{\, (b_1, -2b_1 - 3b_4, -2b_1 - 4b_4, b_4) : b_1 \in \mathbb{R} \text{ és } b_4 = 2b_1 \,\} \\ &= \{\, (b_1, -8b_1, -10b_1, 2b_1) : b_1 \in \mathbb{R} \,\}. \end{aligned}$$

Így $U \cap V$ egydimenziós altér és az $(1, -8, -10, 2)$ vektor generálja.

14. Példa. Folytatjuk a 10 és 12 példákban bevezetett U és V alterek vizsgálatát. Eddig tudjuk, hogy $\dim(U) = 2$, $\dim(V) = 2$, $\dim(U \cap V) = 1$, tehát az alterek dimenziótételéből kapjuk, hogy

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Az előző módszerekkel már meg is tudjuk keresni $U + V$ bázisát. Tudjuk, hogy az U altérnek az $(1, -2, -2, 0)$, $(0, -3, -4, 1)$ vektorrendszer generátorrendszere (itt a bázist vettük, de vehettük volna az $(1, 1, 2, -1)$, $(-2, 1, 0, 1)$, $(-3, 3, 2, 1)$ generátorrendszert is), míg a V altérnek a $(0, 3, 1, -1)$, $(1, -5, -9, 1)$ generátorrendszere. Tehát az $U + V$ alteret ezen generátorrendszerek uniója generálja, azaz

$$U + V = [(1, -2, -2, 0), (0, -3, -4, 1), (0, 3, 1, -1), (1, -5, -9, 1)].$$

Ennek az altérnek az elemeit megint képlet segítségével adjuk meg, amiből a bázis már kiolvasható. A megfelelő lineáris egyenletrendszer bővített mátrixa és annak Gauss-eliminációval való megoldása:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ -2 & -3 & 3 & -5 & d_2 \\ -2 & -4 & 1 & -9 & d_3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & d_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & d_2+2d_1 \\ 0 & -4 & 1 & -7 & d_3+2d_1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & d_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2+2d_1+3d_4 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 & d_3+2d_1+4d_4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & d_4 \end{array}\right)$$

Azaz, az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $d_2 + 2d_1 + 3d_4 = 0$, tehát

$$U + V = \{\, (d_1, -2d_1 - 3d_4, d_3, d_4) : d_1, d_3, d_4 \in \mathbb{R}\,\}.$$

Ebből már könnyen le tudjuk olvasni, hogy $U+V$ háromdimenziós vektortér, és $(1,-2,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,-3,0,1)$ egy bázisa.

15. Definíció. A T test feletti V vektortér $v_1,\dots,v_k$ vektorrendszer lineárisan független részrendszereinek maximális hosszát a vektorrendszer rangjának nevezzük, és $r(v_1,\dots,v_k)$-val jelöljük.

16. Tétel. *Egy T test feletti vektortér bármely $v_1,\dots,v_k$ vektorrendszere esetén*

$$r(v_1,\dots,v_k) = \dim[v_1,\dots,v_k].$$

17. Példa. Kiszámoljuk az $(1,1,2,-1)$, $(-2,1,0,1)$, $(-3,3,2,1)$ vektorrendszer rangját. Ez nem más, mint az általuk feszített altér dimenziója. Ezt a 10 példában már kiszámoltunk, és azt kaptuk, hogy

$$r((1,1,2,-1),(-2,1,0,1),(-3,3,2,1)) = \dim(U) = 2.$$

A 12 és 14 példákban számoltak alapján

$$r((0,3,1,-1),(1,-5,-9,1)) = \dim(V) = 2, \text{ és}$$
$$r((1,-2,-2,0),(0,-3,-4,1),(0,3,1,-1),(1,-5,-9,1)) = \dim(U+V) = 3.$$

A 14 példában mi egy 4-elemű generátorrendszerből indultunk ki, de tudjuk azt, hogy az $(1,1,2,-1)$, $(-2,1,0,1)$, $(-3,3,2,1)$, $(0,3,1,-1)$, $(1,-5,-9,1)$ vektorrendszer is az $U+V$ alteret generálja. Tehát

$$r((1,1,2,-1),(-2,1,0,1),(-3,3,2,1),(0,3,1,-1),(1,-5,-9,1)) = 3.$$

18. Definíció. Két vektorrendszert ekvivalensnek nevezzük, ha ugyanazt az alteret generálják.

19. Definíció. A vektorrendszerek elemi átalakításai a következők:

(1) tetszőleges v_i vektor nemnulla $\lambda \in T$ skalárral való szorzása

$$v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\dots,v_k \quad\sim\quad v_1,\dots,v_{i-1},\lambda v_i,v_{i+1},\dots,v_k$$

(2) tetszőleges v_i vektor tetszőleges $\lambda \in T$ skalárszorosának egy másik v_j $(j \neq i)$ vektorhoz való hozzáadása

$$v_1,\dots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\dots,v_k \quad\sim\quad v_1,\dots,v_{j-1},\lambda v_i + v_j,v_{j+1},\dots,v_k$$

(3) nulla vektor elhagyása

$$v_1,\dots,v_{i-1},0,v_{i+1},\dots,v_k \quad\sim\quad v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k.$$

20. Tétel. *Két vektorrendszer akkor és csak akkor ekvivalensek, ha elemi átalakítások sorozatával egymásba alakíthatók. Tehát tetszőleges generátorrendszer elemi átalakítások sorozatával bázissá alakítható.*

21. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak véges dimenziós vektorterekben?

(1) Ekvivalens vektorrendszerek elemszáma megegyezik.
(2) Elemi átalakítások megfordítottja is elemi átalakítás.
(3) Bármely két lineárisan független vektorrendszer elemi átalakítások sorozatával egymásba alakíthatók.
(4) Bármely két generátorrendszer elemi átalakítások sorozatával egymásba vihetők.
(5) Két azonos vektor közül az egyiknek az elhagyása elemi átalakítások sorozatával megvalósítható.
(6) A $\mathbb{C}^2$ vektortérben az $(1,2),(i,1) \sim (1,2),(0,1-2i) \sim (1,2),(0,1) \sim (1,0),(0,1)$ átalakítások elemiek.

22. Példa. A 10 példa U alterének $(1,1,2,-1)$, $(-2,1,0,1)$, $(-3,3,2,1)$ generátorrendszerét elemi átalakításokkal bázissá alakítjuk.

$$(1,1,2,-1),(-2,1,0,1),(-3,3,2,1) \sim (1,1,2,-1),(-2,1,0,1),(-3,3,2,1)-(1,1,2,-1) =$$
$$(1,1,2,-1),(-2,1,0,1),(-4,2,0,2) \sim (1,1,2,-1),(-2,1,0,1),(-4,2,0,2)-2(-2,1,0,1)$$
$$= (1,1,2,-1),(-2,1,0,1),(0,0,0,0) \sim (1,1,2,-1),(-2,1,0,1).$$

Tudjuk, hogy U kétdimenziós, tehát a kapott kételemű generátorrendszer bázis. Nem ugyanazt a bázist kaptuk, mint a 11 példa megoldásánál, de természetesen ez a két bázis egymásba alakítható:

$$\begin{gathered}(1,1,2,-1),(-2,1,0,1) \sim (1,1,2,-1)+(-2,1,0,1),(-2,1,0,1)\\ = (-1,2,2,0),(-2,1,0,1) \sim -1\cdot(-1,2,2,0),(-2,1,0,1)\\ = (1,-2,-2,0),(-2,1,0,1) \sim (1,-2,-2,0),(-2,1,0,1)+2\cdot(1,-2,-2,0)\\ = (1,-2,-2,0),(0,-3,-4,1).\end{gathered}$$

23. Definíció. Az $A \in T^{m\times n}$-es mátrix sorrangja az A sorai által alkotott vektorrendszer rangja, oszloprangja az A oszlopai által alkotott vektorrendszer rangja.

24. Definíció. Legyen $A \in T^{m\times n}$ tetszőleges T test feletti mátrix és $r \le m,n$ egészek. Az A mátrix r-edrendű aldeterminánsainak az A mátrix tetszőleges r sorát és r oszlopát kijelölve, majd a kijelölt sorok és oszlopok találkozásában lévő elemekből alkotott $r\times r$-es mátrixok determinánsait nevezzük. Az A mátrix determinánsrangja a nemelfajuló (nem nulla) aldeterminánsainak a maximális rendje.

25. Példa. Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 9 & 27 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 25 & 125 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsrangját. A rang maximum 4 lehet, mert ha az utolsó, csupa nulla oszlop benne van egy aldeterminánsban, akkor annak értéke 0. Viszont azokat a sorokat kiválasztva, amelyek 1-gyel kezdődnek az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

aldeterminánst kapjuk, amely éppen egy Vandermonde-determináns, ezért értéke

$$(3-2)(-1-2)(5-2)(-1-3)(5-3)(5-(-1)) \neq 0,$$

tehát az A mátrix determinánsrangja 4.

26. Tétel (Rangszámtétel). *Tetszőleges mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangjai megegyeznek.*

27. Definíció. A rangszámtétel szerint tetszőleges A mátrix sor-, oszlop-, és determinánsrangja megegyezik. Ezt a számot nevezzük az A mátrix rangjának, és $r(A)$-val jelöljük.

28. Következmény. *Tetszőleges $A \in T^{n\times n}$ mátrixra a következő állítások ekvivalensek:*

(1) $|A| \neq 0$,
(2) *A oszlopvektorainak rendszere lineárisan független,*
(3) *A sorvektorainak rendszere lineárisan független.*

29. Tétel (Kronecker-Capelli-tétel). *Tetszőleges T test, $A \in T^{m\times n}$ és $b \in T^m$ esetén az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $r(A) = r(A|b)$.*