Kvadratikus alakok és euklideszi terek

(előadásvázlat, 2008. március 19.)

Maróti Miklós

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.
- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.

1. Megjegyzés. Ebben a fejezetben mindenhol feltesszük, hogy a T testben $1+1 \neq 0$. Ez például a $\mathbb{Z}_2$ testben nem teljesül!

2. Definíció. Legyen U és V vektortér a T test felett. Egy $l : U \times V \to T$ leképezést bilineáris leképezésnek nevezünk, ha

(1) minden $u_1, u_2 \in U$ és $v \in V$ esetén $l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$,
(2) minden $u \in U$ és $v_1, v_2 \in V$ esetén $l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$,
(3) minden $\lambda \in T$, $u \in U$ és $v \in V$ esetén $l(\lambda u, v) = \lambda l(u, v) = l(u, \lambda v)$.

Az l bilineáris leképezés szimmetrikus, ha $U = V$ és minden $u, v \in U$ esetén $l(u, v) = l(v, u)$.

3. Definíció. Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a T test felett, továbbá $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_m$ bázis U-ban és $\mathcal{F} : f_1, \ldots f_n$ bázis V-ben. Az $l : U \times V \to T$ bilineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban az $(l(e_i, f_j)) \in T^{m \times n}$ mátrix. Ha l szimmetrikus, akkor az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokat azonosnak válasszuk, és így definiáljuk l mátrixát.

4. Tétel. *Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a T test felett, $\mathcal{E}$ bázis U-ban, $\mathcal{F}$ bázis V-ben, és $A \in T^{m \times n}$ az $l : U \times V \to T$ bilineáris leképezés mátrixa. Ekkor tetszőleges $u \in U$ és $v \in V$ vektorokra $l(u, v) = xAy^T$, ahol x az u vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban és y a v vektor koordinátasora a $\mathcal{F}$ bázisban. Tehát a bilineáris leképezés mátrixa (valamely bázisban) egyértelműen meghatározza a bilineáris leképezést.*

5. Tétel. *Legyen V véges dimenziós vektortér a T test felett. Az $l : V \times V \to T$ bilineáris leképezés akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) bázisban szimmetrikus.*

6. Definíció. Legyen V vektortér a T test felett. A $q : V \to T$ leképezést kvadratikus alaknak nevezzük, ha létezik olyan $l : V \times V \to T$ szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyre $q(v) = l(v, v)$ minden $v \in V$ esetén.

7. Tétel. *Bármely kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris leképezést.*

8. Definíció. A kvadratikus alak valamely bázisbeli mátrixán a kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris leképezés mátrixát értjük.

9. Tétel. *Legyen V vektortér a T test felett, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok V-ben, és $q : V \to T$ kvadratikus alak. Ha q mátrixa A az $\mathcal{E}$ bázisban, és S az áttérés mátrixa az $\mathcal{F}$ bázisról a $\mathcal{E}$ bázisra, akkor q mátrixa az $\mathcal{F}$ bázisban SAS^T.*

10. Definíció. A q kvadratikus alak rangján valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangját értjük, és $r(q)$-val jelöljük. Azt mondjuk, hogy a q kvadratikus alak az $\mathcal{E}$ bázisban kanonikus alakú, ha mátrixa diagonális.

11. Tétel (Kvadratikus alakok alaptétele). *Bármely véges dimenziós vektortéren értelmezett kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak kanonikus alakú.*

12. Következmény. *Bármely A szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre SAS^T diagonális.*

13. Definíció. Az $\mathbb{R}$ valós számtest feletti véges dimenziós vektortereken értelmezett kvadratikus alakokat valós kvadratikus alakoknak nevezzük. Az

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

alakú kvadratikus alakokat normálalakúnak nevezzük ($0 \leq k \leq r$).

14. Tétel. *Bármely valós kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak normálalakú.*

15. Tétel (Tehetetlenségi tétel). *Minden valós kvadratikus forma normálalakja egyértelműen meghatározott, azaz ha két bázisban a kvadratikus alak normálalakú, akkor ugyanannyi benne a pozitív, illetve a negatív tagok száma.*

16. Definíció. A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

(1) pozitív definit, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) > 0$,
(2) negatív definit, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) < 0$,
(3) pozitív szemidefinit, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) \geq 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,
(4) negatív szemidefinit, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) \leq 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,
(5) minden más esetben indefinit, azaz ha léteznek olyan nemnulla $v, w \in V$ vektorok, hogy $q(v) > 0$ es $q(w) < 0$.

17. Tétel. *Legyen $q = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor*

(1) *pozitív definit, ha $k = r = n$,*
(2) *negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$,*
(3) *pozitív szemidefinit, ha $k = r < n$,*
(4) *negatív szemidefinit, ha $k = 0$ és $r < n$,*
(5) *indefinit, ha $0 < k < r$.*

18. Következmény. *Minden olyan A szimmetrikus mátrixhoz, amelyhez tartozó xAx^T kvadratikus alak pozitív definit, létezik olyan P nemelfajuló valós mátrix, amelyre $A = PP^T$.*

19. Definíció. A valós számtest feletti véges dimenziós V vektorteret euklideszi térnek nevezzük a $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ belső szorzattal, ha $\langle -, - \rangle$ olyan szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyhez tartozó kvadratikus alak pozitív definit. Az $u \in V$ vektor hosszán (normáján) az $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ nemnegatív valós számot értjük. Az u vektor normált, ha $||u|| = 1$. Az u és v vektorok távolsága alatt az $\langle u, v \rangle$ számot értjük.

20. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér euklideszi tér az

$$\langle x, y \rangle = xy^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

úgynevezett standard belső szorzattal.

21. Tétel (Bunyakovszkij-Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség). *Euklideszi tér tetszőleges u, v vektora esetén*

$$|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

22. Tétel (Háromszög egyenlőtlenség). *Euklideszi tér tetszőleges u, v vektora esetén*

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

23. Definíció. Tetszőleges u, v vektorra létezik egy egyértelműen meghatározott $0 \leq \alpha \leq \pi$ szög, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||},$$

amelyet az u és v vektorok szögének nevezünk. Azt mondjuk, hogy az u és v vektorok merőlegesesek (ortogonálisak), ha $\langle u, v\rangle = 0$, amit $u \perp v$-vel jelölünk.

24. Definíció. Az $u_1, \ldots, u_k$ vektorrendszer ortogonális, ha bármely $1 \leq i < j \leq k$ esetén $u_i \perp u_j$. Ha az $u_1, \ldots, u_k$ vektorok normáltak is, akkor ortonormált vektorrendszerről beszélünk. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot ortogonális mátrixnak nevezzük, ha sorvektorrendszere ortonormált az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben.

25. Következmény. *Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha $AA^T = E$, azaz $A^{-1} = A^T$.*

26. Tétel (Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció). *Euklideszi tér tetszőleges $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független vektorrenszere esetén van olyan $v_1, \ldots, v_k$ ortonormált vektorrendszer, amelyre $[u_1, \ldots, u_i] = [v_1, \ldots, v_k]$.*

27. Következmény. *Euklideszi tér bármely ortonormált vektorrendszere kiegészíthető ortonormált bázissá. Euklideszi térben van ortonormált bázis.*

28. Definíció. Az U és V euklideszi terek izomorfak, ha van olyan $\varphi : U \to V$ vektortér izomorfizmus, amely megtartja a belső szorzatot, azaz $\langle u\varphi, v\varphi\rangle = \langle u, v\rangle$ minden $u, v \in U$ esetén.

29. Tétel. *Bármely n-dimenziós euklideszi tér izomorf az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.*

30. Definíció. Legyen V euklideszi tér. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : V \to V$ lienáris transzformáció szimmetrikus, ha minden $u, v \in V$ esetén $\langle u\varphi, v\rangle = \langle u, v\varphi\rangle$.

31. Tétel. *Euklideszi tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) ortonormált bázisban szimmetrikus.*

32. Tétel. *Euklideszi tér bármely szimmetrikus lineáris transzformációjának van sajátértéke.*

33. Tétel. *Euklideszi tér tetszőleges φ szimmetrikus lineáris transzformációja esetén az euklideszi térnek van φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ebben a bázisban φ mátrixa diagonális, ahol a főátlóban rendre a bázisvektorokhoz tartozó sajátértékek állnak.*

34. Következmény. *Bármely A valós szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan P ortogonális mátrix, amelyre $P^{-1}AP$ diagonális.*

35. Tétel (Kvadratikus alakok főtengelytétele). *Euklideszi térben bármely kvadratikus alakhoz megadható az euklideszi tér olyan ortonormált bázisa, amelyben a kvadratikus alak kanonikus alakú.*