

6. Feladatsor - Bilineáris leképezések, kvadratikus alakok, euklideszi terek

Alap feladatok

1. Feladat. Legyen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a $\varphi: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ bilineáris alak mátrixa az $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$ bázisban. Határozzuk meg a $\varphi((1, -1, 1), (1, 0, 1))$ értéket.

2. Feladat. Adjunk meg olyan B nemelfajuló mátrixot, amelyre $B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} B^T$ diagonális.

3. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra a következő kvadratikus alakokat.

- (1) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$,
- (2) $x_1x_2 - x_2^2$,
- (3) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

4. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Scmidt-ortogonalizációt az alábbi lineárisan független vektorrendszereken!

- (1) $(1, 0, 0), (2, 3, 0), (1, 6, 1)$,
- (2) $(1, 6, 1), (1, 0, 0), (2, 3, 0)$,
- (3) $(1, 1, -1, 1), (2, 1, -1, 0), (2, -1, 3, 2)$.

5. Feladat. Adjunk meg (ortogonális) bázist az alábbi alterek ortogonális kiegészítőjében.

- $[(1, 1, -1), (1, 2, 1)]$,
- $[(1, -1, 1, 1), (1, 2, -1, 1), (2, 1, 0, 2)]$,
- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.