5. Feladatsor - Sajátérték / sajátvektor

Alap feladatok

1. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit, adjunk meg bázist a sajátaltereikben, valamint döntsük el, hogy van-e olyan bázisa a vektortérnek, melyben a transzformációk mátrixa diagonális.*

(1) $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$,
(2) $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 3x_2, 2x_1 + 2x_2)$,
(3) $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2)$,
(4) $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, -3x_2 + 2x_3)$,
(5) $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - 5x_2 - 4x_3, 5x_1 - 4x_2 - 4x_3, -x_1 + 3x_2 + 3x_3)$.

2. Feladat. *Adjuk meg a $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban, ha φ-nek két sajátértéke van: -1 és 2, és a sajátértékekhez tartozó sajátalterek:*

$$U_{-1} = [(1, -1, 1)],\ U_2 = [(1, -1, 2), (-1, 2, 3)].$$

Nehezebb feladatok

3. Feladat. *Adjuk meg (természetesen mátrixával) az $\mathbf{R}^3$ vektortér egy olyan lineáris transzformációját, melynek 3 különböző valós sajátértéke van.*

4. Feladat. *Adjuk meg (természetesen mátrixával) az $\mathbf{R}^3$ vektortér egy olyan lineáris transzformációját, melynek 2 különböző valós sajátértéke van, és a hozzájuk tartozó sajátalterek 1 dimenziósak.*

5. Feladat. *Legyen $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció, U_1 és U_2 pedig két különböző sajátaltere. Igazoljuk, hogy $U_1 \cap U_2$ egyelemű.*