3. Gyakorlat

Alap feladatok

1. Feladat. *Döntsük el, hogy a komplex számok alább megadott részhalmazai közül melyek alkotnak résztestet.*

(1) $\mathbf{Q}^+$,
(2) $\mathbf{Z}$,
(3) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$,
(4) $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbf{Q}\}$.

2. Feladat. *A fenti példák közül a résztestek hány dimenziós vektorteret alkotnak* $\mathbf{Q}$ *felett?*

3. Feladat. *Adjuk meg a* V *vektortérben megadott* U_1 *és* U_2 *alterek metszetének, illetve összegének az elemeit.*

(1) $V = \mathbf{Z}_3^3,\ U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : \overline{2}x_1 - x_2 = \overline{0}\},\ U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - x_3 = \overline{0}\}$,
(2) $V = \mathbf{Z}_3^3,\ U_1 = [(\overline{1}, \overline{0}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}],\ U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - x_3 = \overline{0}\}$,
(3) $V = \mathbf{Z}_3^3,\ U_1 = [(\overline{2}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0})],\ U_2 = [(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2})]$.

4. Feladat. *Adjunk meg bázist a* V *vektortérben megadott* U_1 *és* U_2 *vektorterek metszetében, illetve összegében.*

(1) $V = \mathbf{R}^4,\ U_1 = [(1, 2, 1, 0), (1, 1, 2, 1)],\ U_2 = [(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)]$,
(2) $V = \mathbf{R}^4,\ U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\},\ U_2 = [(1, 2, 1, 1), (-1, 2, 1, 1)]$.

5. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nemnulla aldeterminánst.*

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nehezebb feladatok

6. Feladat. *Hány* 1, *illetve* 2 *dimenziós altere van a* $\mathbf{Z}_3^4$ *vektortérnek?*

7. Feladat. *Igazoljuk, hogy az* $\mathbf{R}^2$ *vektortér nem áll elő véges sok* 1 *dimenziós alterének egyesítéseként.*

8. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját az x paraméter függvényében.*

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ x & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Feladat. *Mennyi annak a mátrixnak a rangja, amelynek minden sorában különböző hányadosú mértani sor szerepel?*

10. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy mátrixban a sorok is lineárisan függetlenek, meg az oszlopok is, akkor a mátrix négyzetes.*

11. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy mátrix rangja r, és az oszlopaiból csak egyféleképpen lehet r db lineárisan függetlent kiválasztani, akkor a többi oszlopa csupa 0-ából áll.*