1. Gyakorlat

Permutációk

1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi permutáció-szorzatokat.*

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Feladat. *Adjuk meg az alábbi permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként.*

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$,

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}^{6}$,

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{1433}$,

(6) $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 5)$,

(7) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 2\ 4\ 6)(2\ 4\ 6)$,

(8) $(2\ 4\ 5)(1\ 3\ 5)^{-1}(1\ 2)$,

(9) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^3$,

(10) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^4$,

(11) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^5$,

(12) $((1\ 3\ 4\ 5)(3\ 2\ 1\ 4))^{1276}$.

3. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását!*

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

(3) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 3\ 2)(2\ 4\ 6)$,

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 8 & 7 & 9 & 13 & 10 & 16 & 15 & 12 & 17 & 14 & 11 \end{pmatrix}^4$.

4. Feladat. *Adjuk meg a π permutációt páronként idegen ciklusokra bontott alakban.*

(1) $((1\ 2\ 3)(2\ 1))^{-1}\pi = (2\ 4)$,

(2) $((1\ 2\ 3)(2\ 3))^{-1}\pi(2\ 3\ 1) = (3\ 1)$.

Nehezebb feladatok

5. Feladat. *Milyen a szerkezete egy n hosszú ciklus k-ik hatványának? (Magyarul a páronként idegen ciklusokra bontott alakjában milyen hosszú ciklusok szerepelnek, és melyikből mennyi)*

6. Feladat. *Milyen lehet a szerkezete egy* 2 *és egy* 4 *hosszú ciklus szorzatának (mindenféle sorrendben)?*

7. Feladat. *Milyen lehet a szerkezete egy* 3 *és egy* 4 *hosszú ciklus szorzatának (mindenféle sorrendben)?*

8. Feladat. *Oldjuk meg* S_4*-ben, illetve* S_5*-ben az alábbi egyenleteket.*

(1) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$,
(2) $\pi^3 = id$,
(3) $\pi^2 = (1\ 2)$.

9. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi permutációegyenleteket a megadott permutációcsoportban.*

(1) S_5*-ben:* $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$,
(2) S_7*-ben:* $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$,
(3) S_6*-ban:* $\pi^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$.

10. Feladat. *Adjunk meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció* 2*-ik hatványaként.*

11. Feladat. *Adjunk meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció* 6*-ik hatványaként.*

12. Feladat. *Igazoljuk, hogy bármely* $\pi \in S_n$ *permutáció esetén létezik olyan* k*, amelyre* $\pi^k = id$*.*

13. Feladat. *Adjuk meg a legkisebb olyan* k *pozitív egész számot, amelyre* $\pi^k = id$ *bármely* $\pi \in S_n$ *esetén, ahol* $1 \leq n \leq 9$*.*