LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK II.

2004. december 1.

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
11. fejezet (Műveletek lineáris leképezésekkel);
12. fejezet (Lineáris leképezések mátrixa).
13. fejezet (Áttérés új bázisra. Koordináta-transzformáció).

további ajánlott irodalom:
Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
5. fejezet (Lineáris leképezések).
(Néhány feladat — esetleg kissé átfogalmazva, kiegészítve, illetve más jelölésekkel — is innen származik.)

Ajánlott feladatok

Műveletek lineáris leképezésekkel.

1. Feladat. Legyen V a(z origókezdőpontú) síkvektorok szokásos vektortere a valós számtest fölött. Mi lesz a $\alpha + \beta$ transzformáció abban az esetben, ha

(a) α az x-tengelyre, β az y tengelyre történő tükrözés;
(b) α az x-tengelyre, β az y tengelyre történő merőleges vetítés;
(c) α az origó körüli $+60°$-os, β az origó körüli $-60°$-os elforgatás;
(d) α az origó körüli θ szöggel, β az origó körüli $-\theta$ szöggel való elforgatás;
(e) α az identikus leképezés, β az origó körüli $+90°$-os elforgatás.

2. Feladat. Legyenek ϕ, ψ, ν és μ az $\mathbb{R}^2$ vektortér következő lineáris transzformációi:

$$(x, y)\phi = (y, -x), \quad (x, y)\psi = (x, -y), \quad (x, y)\nu = (x - y, x), \quad (x, y)\mu = (0, x)\,.$$

Határozza meg a következő lineáris transzformációkat:

$$\phi + \psi + \nu, \qquad 2\phi - 3\nu, \qquad \phi\psi - \nu, \qquad \phi^2 - \mu^2, \qquad \phi\mu - \mu\phi\,.$$

3. Feladat. Adjon meg az $\mathbb{R}^2$ vektortérben olyan ϕ, ψ és μ lineáris transzformációkat, amelyekre

$$\text{(a)} \quad \phi\psi = \mathbf{0}, \quad \text{de} \quad \psi\phi \neq \mathbf{0}\,; \qquad\qquad \text{(b)} \quad \mu^2 = \mathbf{0}, \quad \text{de} \quad \mu \neq \mathbf{0}\,.$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

4. Feladat. Bizonyítsa be, hogy bármely $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ esetén

(a) $\mathrm{Ker}(\phi + \psi) \supseteq \mathrm{Ker}\,\phi \cap \mathrm{Ker}\,\psi$;
(b) $\mathrm{Im}(\phi + \psi) \subseteq \mathrm{Im}\,\phi + \mathrm{Im}\,\psi$;
(c) $\mathrm{Ker}(\lambda\phi) = \mathrm{Ker}\,\phi$, ha $\lambda \neq 0$;
(d) $\mathrm{Im}(\lambda\phi) = \mathrm{Im}\,\phi$, ha $\lambda \neq 0$;

Lineáris leképezés mátrixa.

5. Feladat. Határozza meg azt a $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést, amelyre

$$(1,1,0)\psi = (1,2), \qquad (1,0,1)\psi = (0,0), \qquad (0,1,1)\psi = (2,1)$$

Megoldás. Könnyen ellenőrizhető (tegyük meg!), hogy az $(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$ vektorrendszer bázis az $\mathbb{R}^3$ vektortérben. Ezért a 12.1. Tétel szerint pontosan egy ilyen ψ létezik. Fejezzük ki a standard bázis elemeit ebben a bázisban:

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= \frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1)\\
(0,1,0) &= \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1)\\
(0,0,1) &= -\frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1)\,.
\end{aligned}$$

Mivel ψ lineáris, ezért a fenti összefüggések meghatározzák a bázisvektorok képeit:

$$\begin{aligned}
(1,0,0)\psi &= \left(\frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1)\right)\psi =\\
&= \frac{1}{2}\big((1,1,0)\psi\big) + \frac{1}{2}\big((1,0,1)\psi\big) - \frac{1}{2}\big((0,1,1)\psi\big) =\\
&= \frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{2}(0,0) - \frac{1}{2}(2,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}
(0,1,0)\psi &= \left(\frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1)\right)\psi =\\
&= \frac{1}{2}\big((1,1,0)\psi\big) - \frac{1}{2}\big((1,0,1)\psi\big) + \frac{1}{2}\big((0,1,1)\psi\big) =\\
&= \frac{1}{2}(1,2) - \frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(2,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
(0,0,1)\psi &= \left(-\frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1)\right)\psi =\\
&= -\frac{1}{2}\big((1,1,0)\psi\big) + \frac{1}{2}\big((1,0,1)\psi\big) + \frac{1}{2}\big((0,1,1)\psi\big) =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(2,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ezeket (és persze ψ linearitását) fölhasználva tetszőleges $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vektornak meg tudjuk adni a ψ melletti képét:

$$\begin{aligned}(x,y,z)\psi &= \big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\big)\psi = \\ &= x\big((1,0,0)\psi\big) + y\big((0,1,0)\psi\big) + z\big((0,0,1)\psi\big) = \\ &= x\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}(-x+3y+z), \frac{1}{2}(x+3y-z)\right)\end{aligned}$$

tehát ψ „képlete” a következő

$$\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto \left(\frac{1}{2}(-x+3y+z), \frac{1}{2}(x+3y-z)\right).$$

* * * * * * * * * *

6. Feladat. Van-e olyan (és ha igen, akkor hány) $\chi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, amelyre:

(a) $(1,1,0)\chi = (1,1,-1)$, és $(1,0,1)\chi = (2,1,0)$;
(b) $(1,1,1)\chi = (1,1,1)$, $(1,2,3)\chi = (-1,-2,-3)$, és $(1,1,2)\chi = (2,2,4)$;
(c) $(1,1,1)\chi = (1,1,1)$, $(2,2,3)\chi = (3,3,5)$, és $(1,1,2)\chi = (2,2,4)$;
(d) $(1,0,1)\chi = (2,-3,0)$, $(0,1,0)\chi = (-1,2,0)$, és $(1,1,1)\chi = (1,0,0)$;
(e) $(0,1,1)\chi = (3,1,-2)$, $(1,0,1)\chi = (4,-1,1)$, $(1,1,0)\chi = (-3,2,1)$ és $(1,1,1)\chi = (3,4,2)$;
(f) $(1,0,0)\chi = (3,1,-2)$, $(0,1,0)\chi = (4,-1,1)$, $(0,0,1)\chi = (-3,2,1)$ és $(1,1,1)\chi = (4,2,0)$.

Ha igen, akkor írjuk föl a χ „képletét”.

7. Feladat. (ld. az előző feladatot) Legyen $v_1, \dots, v_n$

(a) generátorrendszer,
(b) lineárisan független vektorrendszer,

a V vektortérben, és legyenek $u_1, \dots, u_n$ tetszőleges elemek az (ugyanazon T test fölötti) U vektortérben. Hány olyan $\chi\colon V \to U$ lineáris leképezés létezik, amelyre $v_i\chi = u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$?

8. Feladat. Az alábbi feladatokban adott egy φ lineáris leképezés, valamint egy $\mathcal{F}$ bázis az indulási, és egy $\mathcal{G}$ bázis az érkezési vektortérben.

(1) (gyakorlásképpen) Igazolja, hogy φ lineáris leképezés.
(2) Határozza meg φ mátrixát a megadott két bázisra vonatkozóan.
(3) Adja meg az adott x vektor koordinátáit az $\mathcal{F}$ bázisban, valamint $x\varphi$ koordinátáit a $\mathcal{G}$ bázisban.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z,u) \mapsto (2x+z, y-u, u);$
$\mathcal{F} : f_1 = (1,-1,0,0),\ f_2 = (1,1,0,0),\ f_3 = (1,1,1,-1),\ f_4 = (1,1,1,1);$
$\mathcal{G} : g_1 = (1,1,1),\ g_2 = (-1,0,0),\ g_3 = (1,1,-1);\qquad x = (4,3,-1,1).$
(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z,u) \mapsto (2x+z, y-u);$
$\mathcal{F} : f_1 = (1,-1,0,0),\ f_2 = (1,1,0,0),\ f_3 = (1,1,1,0),\ f_4 = (1,1,1,1);$
$\mathcal{G} : g_1 = (1,1),\ g_2 = (-1,0);\qquad x = (2,3,1,0).$
(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x-y, x+z);$
$\mathcal{F} : f_1 = (1,0,0),\ f_2 = (1,0,1),\ f_3 = (1,1,1);$
$\mathcal{G} : g_1 = (1,0),\ g_2 = (1,-1);\qquad x = (2,3,-5).$
(d) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+2y, y+z);$
$\mathcal{F} : f_1 = (1,0,0),\ f_2 = (1,0,-1),\ f_3 = (1,1,1);$
$\mathcal{G} : g_1 = (1,0),\ g_2 = (1,-1);\qquad x = (1,3,-1).$
(e) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+2y, y, x-y);$
$\mathcal{F} : f_1 = (1,0),\ f_2 = (1,-1);$
$\mathcal{G} : g_1 = (1,0,1),\ g_2 = (1,0,-1),\ g_3 = (0,1,1);\qquad x = (3,-1).$
(f) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, 2y, 3x-y);$
$\mathcal{F} : f_1 = (1,1),\ f_2 = (1,-1);$
$\mathcal{G} : g_1 = (1,0,1),\ g_2 = (1,0,-1),\ g_3 = (1,1,1);\qquad x = (2,-5).$

Megoldás. Mintaként megoldjuk a (d) feladatot:
φ lineáris leképezés:
Azt kell igazolni, hogy

(1) bármely $u, v \in \mathbb{R}^3$-ra $(u+v)\varphi = u\varphi + v\varphi$ és
(2) bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $u \in \mathbb{R}^3$ esetén $(\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi)$.

Mindkét feltétel teljesül, hiszen tetszőleges $u = (u_1,u_2,u_3),\ v = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorokra:

$$\begin{aligned}(u+v)\varphi &= \left((u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)\right)\varphi = \left((u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)\right)\varphi = \\ &= \left((u_1+v_1)+2(u_2+v_2), (u_2+v_2)+(u_3+v_3)\right) = \\ &= \left((u_1+2u_2)+(v_1+2v_2), (u_2+u_3)+(v_2+v_3)\right) = \\ &= (u_1+2u_2, u_2+u_3)+(v_1+2v_2, v_2+v_3) = u\varphi + v\varphi,\end{aligned}$$

azaz φ megőrzi az összeadást.
Továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3$ esetén:

$$\begin{aligned}(\lambda u)\varphi &= \left(\lambda(u_1,u_2,u_3)\right)\varphi = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)\varphi = \\ &= (\lambda u_1 + 2\lambda u_2, \lambda u_2 + \lambda u_3) = \lambda(u_1+2u_2, u_2+u_3) = \\ &= \lambda\big((u_1,u_2,u_3)\varphi\big) = \lambda\left((u\varphi)\right).\end{aligned}$$

azaz φ megőrzi a skalárral való szorzást is, tehát valóban lineáris.

φ mátrixának meghatározása:
Keressük azt az $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ mátrixot, melynek elemeire

$$\begin{aligned}f_1\varphi &= a_{11}g_1 + a_{12}g_2\\ f_2\varphi &= a_{21}g_1 + a_{22}g_2\\ f_3\varphi &= a_{31}g_1 + a_{32}g_2\end{aligned}$$

teljesül, azaz

$$\begin{aligned}(1,0,0)\varphi &= (1,0) &&= a_{11}(1,0) + a_{12}(1,-1)\\ (1,0,-1)\varphi &= (1,-1) &&= a_{21}(1,0) + a_{22}(1,-1)\\ (1,1,1)\varphi &= (3,2) &&= a_{31}(1,0) + a_{32}(1,-1)\end{aligned}$$

Az első egyenlőség az (igen egyszerű)

$$a_{11} + a_{12} = 1 \qquad\qquad - a_{12} = 0$$

egyenletrendszerre vezet, melynek megoldása: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$. Hasonlóan a másodikból kapjuk, hogy $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, a harmadikból pedig $a_{31} = 5$, $a_{32} = -2$ adódik. Tehát a φ lineáris leképezés mátrixa az adott két bázisra vonatkozóan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

x és $x\varphi$ koordinátasorai:
Az $x = (1,3,-1)$ vektor koordinátasora az $\mathcal{F} : f_1, f_2, f_3$ bázisban $c = (c_1, c_2, c_3)$, ha $x = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3$, azaz ha

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 + c_3 &= 1\\ c_3 &= 3\\ -c_2 + c_3 &= -1\,.\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $c_1 = -6, c_2 = 4, c_3 = 3$, tehát az $x = (1,3,-1)$ vektor koordinátasora az $\mathcal{F}$ bázisban $c = (-6,4,3)$. Ennek segítségével felírható $x\varphi$ koordinátasora is a $\mathcal{G} : g_1, g_2$ bázisban a következőképpen (ld. 12.3. Tétel előtti megjegyzést):

$$c' = cA = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Így az $x\varphi$ koordinátasora a $\mathcal{G}$ bázisban $c' = (9,-2)$.

* * * * * * * * * *

9. Feladat. Tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\begin{aligned}&\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)\\ &\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (z,y)\\ &\eta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (2x-y, 0, x+3y)\end{aligned}$$

(a) Igazolja, hogy mindhárom leképezés lineáris.
(b) Adja meg a magtereiket és a képtereiket, és határozza meg ezek dimenzióját.
(c) Határozza meg $\eta\varphi$ mátrixát az $\mathbb{R}^2$ standard bázisában.
(d) Határozza meg $\varphi\eta$ mátrixát az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában.
(e) Határozza meg $\varphi - 2\psi$ mátrixát az $\mathcal{A} = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$, $\mathcal{B} = \{((0,-1),(1,0)\}$ bázis-párban.

10. Feladat. Tekintsük az alábbi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezéseket:

$$\varphi\colon (x,y,z) \mapsto (2x,-z,4z) \qquad \text{és} \qquad \psi\colon (x,y,z) \mapsto (y,y,2y)\,.$$

(a) Igazolja, hogy φ lineáris és adjuk meg a képterét.
(b) Adja meg ψ magterét és határozza meg a rangját.
(c) Határozza meg φ^2 mátrixát az $\mathcal{E} = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ bázisban.

11. Feladat. Tekintsük a következő leképezéseket:

$$\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_4[x],\ (a,b,c,d) \mapsto (b+c)+(a-b+c)x+(d-c)x^2+cx^3$$
$$\psi\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^4,\ a+bx+cx^2+dx^3 \mapsto (2a+b-3c, a+b-2d, 2c+3d, c+3d)$$

(a) Mutassa meg, hogy ϕ lineáris transzformáció és adjuk meg a magterét.
(b) Határozza meg ψ mátrixát az

$$\mathcal{A} = \{1,x,x^2,x^3\} \qquad \mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

bázispárban. Mennyi a ψ rangja?
(c) Írja föl a $\phi\psi$ leképezés mátrixát a standard bázisban.

12. Feladat. Tekintsük az alábbi lineáris leképezéseket:

$$\delta\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_3[x],\ p \mapsto p' \qquad \text{és } \tau\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_4[x], \qquad p \mapsto xp\,.$$

(a) Határozza meg δ és τ magját, képterét illetve ezen alterek dimenzióit.
(b) Írja föl δ mátrixát a standard bázisokban.
(c) Írja föl τ mátrixát az

$$\mathcal{A} = \{1, 1+x, 1+x^2\} \qquad \mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$$

bázisokban.
(d) Írja föl $\tau\delta$ mátrixát $\mathbb{R}_3[x]$ standard bázisában.
(e) Írja föl $\delta\tau$ mátrixát az $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}\}$ bázisban.

13. Feladat. A valós számok teste fölötti, n-nél ($n \in \mathbb{N}$) kisebb fokú polinomok (n dimenziós) vektorterét jelölje $\mathbb{R}_n[x]$. Mutassa meg, hogy az a leképezés, amely minden polinomhoz a deriváltját rendeli, lineáris transzformáció. Írjuk fel ennek a transzformációnak a mátrixát az

(a) $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$;
(b) $\{1, 1+x, 1+x^2, \dots, 1+x^{n-1}\}$;
(c) $\{1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}\}$;
(d) $\left\{1, x, \dfrac{x^2}{2!}, \dots, \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$.

bázisban.

14. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges n-dimenziós vektortérben az identikus transzformáció [a zérus transzformáció] mátrixa *minden* bázisban az $n \times n$-es egységmátrix [a zérusmátrix].

15. Feladat. Melyek azok a $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ lineáris transzformációk, amelyeknek *bármely* bázisban ugyanaz a mátrixa?

16. Feladat. Legyen az U vektortér egy bázisa $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$, a V vektortér egy bázisa $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$. Hogyan változik egy $\varphi: U \to V$ lineáris leképezés $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázisokban fölírt mátrixa, ha

(1) a_1-et és a_2-t fölcseréljük;
(2) b_1-et és b_2-t fölcseréljük;
(3) a_3 helyett λa_3-at veszünk ($\lambda \neq 0$);
(4) b_3 helyett λb_3-at veszünk ($\lambda \neq 0$);
(5) a_3 helyett $a_3 + \lambda a_2$-t veszünk;
(6) b_3 helyett $b_3 + \lambda b_2$-t veszünk.

17. Feladat. Oldjuk meg a 8. Feladatot úgy, hogy

(1) meghatározzuk φ mátrixát a standard bázisokban;
(2) meghatározzuk az áttérés-mátrixot a standard bázisokról $\mathcal{F}$-re illetve $\mathcal{G}$-re (ld. 13. fejezet)
(3) majd ezek segítségével meghatározzuk a φ mátrixát az $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ bázis-párban.