VEKTORTEREK II.
LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG, BÁZIS, DIMENZIÓ

2004. november 8.

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
7. fejezet (Lineárisan független és függő vektorrendszerek);
8. fejezet (Véges dimenziós vektorterek);

további ajánlott irodalom: (ld. fénymásolva!)
Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
4. fejezet (Vektorterek),

4. szakasz (Lineáris függetlenség): 4.4.1. - 4.4.8., 4.4.10., 4.4.12/a;
5. szakasz (Bázis): 4.5.1., 4.5.5., 4.5.7. - 4.5.9.;
6. szakasz (Dimenzió): 4.6.3., 4.6.5.;
7. szakasz (Koordináták): 4.7.1., 4.7.5./a;

További ajánlott feladatok

Lineáris függetlenség.

1. Feladat. Állapítsa meg, hogy a következő vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

(a) $A = \{(0,1,0)\}$;
(b) $B = \{(0,1,0),\ (1,0,1)\}$;
(c) $C = \{(1,-1,0),\ (-1,1,0)\}$;
(d) $D = \{(1,1,1),\ (0,1,0),\ (1,0,1)\}$;
(e) $E = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$;
(f) $F = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\}$;
(g) $G = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (1,1,1)\}$;
(h) $H = \{(1,1,1),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.
(k) $K = \{(-1,0,0),\ (0,-1,0),\ (1,1,1),\ (0,0,-1)\}$.

2. Feladat. Legyen $u = (5,\ -4)$, $v = (x,\ 9)$, $w = (3,\ y)$. Adjuk meg x-et és y-t úgy, hogy u, v lineárisan független, u, w viszont lineárisan függő vektorrendszer legyen.

3. Feladat. Döntse el, hogy lineárisan függő vagy független az alábbi vektorrendszer $\mathbb{R}^4$-ben:

$$v_1 = (2,1,-1,3),\ v_2 = (-5,-2,4,-3),\ v_3 = (7,3,-5,6),\ v_4 = (-1,-1,-1,-6)\,.$$

4. Feladat. Mutassa meg, hogy $\mathbb{R}^3$-ban az $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),(1,1,1)\}$ vektorrendszer lineárisan függő, de a rendszer bármely három vektora lineárisan független.

5. Feladat. Állapítsa meg, hogy a következő vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e a valós polinomok $\mathbb{R}[x]$ vektorterében:

(a) $\{1,\ x,\ x^2\}$;
(b) $\{1+x,\ 1-x,\ x^2,\ 1\}$;
(c) $\{x^2-1,\ x+1,\ x^2-x,\ x^2+x\}$;
(a) $\{1,\ x,\ x^2,\ldots,x^n\}$, ahol $n\in\mathbb{N}$;
(d) $\{x-x^2,\ x,\ x^2-x\}$;
(e) $\{1,\ 1-x,\ 1-x^2\}$;
(e) $\{1,\ 1-x,\ 1-x^2,\ldots,1-x^n\}$, ahol $n\in\mathbb{N}$;
(f) $\{3x^3-x^2+2x,\ 2x^3+4x^2-5x+2,\ -x^3+3x-4\}$.

6. Feladat. A valós függvények vektorterében ($\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) vizsgálja meg az alábbi vektorrendszerek lineáris függőségét:

(a) $\{2,\ \sin x,\ \cos x\}$;
(b) $\{1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x\}$;
(c) $\{x,\ \sin x,\ \cos x\}$;
(d) $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x\}$;
(e) $\{1,\ e^x,\ e^{2x}\}$.

Megoldás. Megvizsgáljuk, hogy a vektorok mely lineáris kombinációja állítja elő a 0 vektort! Ha csak a triviális, akkor lineárisan független, ha más is, akkor lineárisan függő a vektorrendszer. Azt persze tudjuk, hogy ebben a vektortérben a zérusvektor (az összeadás egységeleme) az azonosan 0 függvény, azaz az $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 0$ leképezés.

(b) A jól ismert $\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$ azonosságot kicsit átrendezve kapjuk: $-1+\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 0$, tehát $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1$ választással előállítottuk a 0-t, így ez a vektorrendszer linárisan függő.

(c) Tegyük föl, hogy valamely $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ skalárokra:

$$\lambda_1 x+\lambda_2\sin x+\lambda_3\cos x\equiv 0$$

ami azt jelenti, hogy

$$\forall x\in\mathbb{R}:\quad \lambda_1 x+\lambda_2\sin x+\lambda_3\cos x=0\,.$$

Legyen pl. $x=0$, ezt behelyettesítve

$$\lambda_1 0+\lambda_2 0+\lambda_3 1=0\,,$$

amiből azonnal kapjuk, hogy $\lambda_3=0$; Az $x=\pi$ helyettesítésre

$$\lambda_1\pi+\lambda_2 0+\lambda_3(-1)=0\,,$$

és mivel $\lambda_3=0$, ezért ebből kapjuk, hogy $\lambda_1\pi=0$, tehát $\lambda_1=0$. Végül $x=\frac{\pi}{2}$-re kapjuk, hogy

$$\lambda_1\frac{\pi}{2}+\lambda_2 1+\lambda_3 0=0\,,$$

mivel már korábban kiderült, hogy $\lambda_1=\lambda_3=0$, ezért $\lambda_2 1=0$, ami csak úgy lehet, ha $\lambda_2=0$.
Így csak a triviális lineáris kombináció adja a 0-t, vagyis (a definíció szerint) lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

7. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha az $\mathbb{R}$ halmazt a racionális számtest fölötti vektortérnek tekintjük, akkor az 1 és x vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha x irracionális.

8. Feladat. A k skalár mely értékeire lesz az

(a) $\{(1+k, 1-k),\ (1-k, 1+k)\} \subseteq \mathbb{R}^2$;
(b) $\{(k, 1, 0),\ (1, k, 1),\ (0, 1, k)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
(c) $\{(k, 1, 0),\ (1, k, 1),\ (0, 1, k)\} \subseteq \mathbb{Q}^3$;

vektorrendszer lineárisan (össze)függő ?

9. Feladat.

(a) A k, l skalárok mely értékeire lesznek az $\mathbb{R}^2$-beli $(1, k)$ és $(1, l)$ vektorok lineárisan függők?
(b) A k, l, m skalárok mely értékeire lesznek az $\mathbb{R}^3$-beli

$$(1, k, k^2), (1, l, l^2) \text{ és } (1, m, m^2)$$

vektorok lineárisan függők?
(c) Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az (a) és (b) általánosítását $\mathbb{R}^n$-re.

10. Feladat. Legyenek u, v és w lineárisan független vektorok valamely vektortérben. Mit mondhatunk az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenségéről:

(a) $u+v, \quad v+w, \quad w+u$;
(b) $u+v, \quad u-v, \quad u-2v+w$;
(c) $u+2v, \quad u+2w, \quad -2v+w$;
(d) $u+3v+2w, \quad 2u+w, \quad u-2v+w$.

Megoldás. (b) Azt kell megvizsgálni, hogy az $u+v,\ u-v,\ u-2v+w$ vektorrendszer mely lineáris kombinációja állítja elő a $\underline{0}$ vektort:

$$\lambda_1(u+v) + \lambda_2(u-v) + \lambda_3(u-2v+w) = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)u + (\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)v + \lambda_3 w = \underline{0}$$

Mivel az $\{u, v, w\}$ vektorrendszerről tudjuk, hogy lineárisan független, ezért tudjuk, hogy csak a triviális lineáris kombinációjuk ad $\underline{0}$ -t. Így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

amelyből $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, tehát az $\{u+v,\ u-v,\ u-2v+w\}$ vektorrendszer (is) lineárisan független.

11. Feladat. Lineárisan függetlenek-e az

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} v_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

vektorok, feltéve, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek?

12. Feladat. Legyen V tetszőleges $\mathbb{R}$ fölötti vektortér és tegyük fel, hogy $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineárisan független vektorrendszer V-ben; továbbá legyen $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ minden $i = 1, 2, \dots, k$-ra. Bizonyítsa be, hogy a $\{v - v_1, v - v_2, \dots, v - v_k\}$ vektorrendszer akkor, és csak akkor lineárisan független, ha $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 1$.

Bázis, dimenzió, koordináták.

13. Feladat. Állapítsa meg, hogy a következő vektorrendszerek bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

(a) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;
(b) $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)$;
(c) $(2, 1, -3,), (3, 2, -5), (1, -1, 1)$;
(d) $(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$;
(e) $(1, 2, 0), (0, 1, -1), (2, 0, 1)$;
(f) $(1, 2, 3), (1, 0, -1), (0, 2, 4)$.

Ha igen, akkor határozza meg az

(1) $(5, -9, 12)$;
(2) $(a, b, c) \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

vektor koordinátáit a szóbanforgó bázisban.

14. Feladat. Mutassa meg, hogy az alábbi halmazok az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek alterei, és határozza meg a dimenziójukat:

(a) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 = x_3 = 0\}$;
(b) $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 = 2x_2,\ x_3 = x_1 + x_2\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 = 3x_2 + x_3,\ x_4 = 0\}$.

Megoldás. (b) Az $\mathbb{R}^4$ vektortér valamely (x_1, x_2, x_3, x_4) vektora tehát pontosan akkor van benne a T részhalmazban, ha $x_1 = 2x_2,\ x_3 = x_1 + x_2$, azaz ha $x_1 = 2x_2,\ x_3 = 3x_2$. Ezek szerint:

$$\begin{aligned} T &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 = 2x_2,\ x_3 = x_1 + x_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 = 2x_2,\ x_3 = 3x_2\} \\ &= \{(2x_2, x_2, 3x_2, x_4)\colon\ x_2,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x_2, x_2, 3x_2, 0) + (0, 0, 0, x_4)\colon\ x_2,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(2, 1, 3, 0) + x_4(0, 0, 0, 1)\colon\ x_2,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

amiből látszik, hogy T pontosan az $(2, 1, 3, 0)$ és $(0, 0, 0, 1)$ vektorok lineáris kombinációiból áll, tehát T nem más, mint a $(2, 1, 3, 0)$ és $(0, 0, 0, 1)$ vektorok által generált altér. Ezzel egyrészt beláttuk, hogy T altér, másrészt a két generáló vektor nyilván (!) lineárisan független, így ez a két vektor T egy bázisát alkotja. Dimenziója pedig nem más, mint a bázisai (közös) elemszáma; kiderült, hogy T-nek van kételemű bázisa, tehát $\dim T = 2$.

15. Feladat. Határozza meg az $x_1, \dots, x_m$ vektorok által kifeszített ($\mathbb{R}^4$-beli illetve $\mathbb{R}^5$-beli) altér egy bázisát és dimenzióját, ha:

(a) $x_1 = (2, 1, 3, 1),\ x_2 = (1, 2, 1, 0),\ x_3 = (-1, 1, -3, 0)$;
(b) $x_1 = (2, 0, 1, 3, -1),\ x_2 = (1, 1, 0, -1, 1),\ x_3 = (0, -2, 1, 5, -3),\ x_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$;
(c) $x_1 = (2, 1, 3, -1),\ x_2 = (-1, 1, -3, 1),\ x_3 = (4, 5, 3, -1),\ x_4 = (1, 5, -3, 1)$.

16. Feladat. Állapítsa meg, hogy a következő vektorrendszerek bázist alkotnak-e a legfeljebb másodfokú polinomok $\mathbb{R}_3[x]$ vektorterében:

(a) $1,\ x,\ x^2$;
(b) $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$;
(c) $x, 1+x,\ 1+x^2$;
(d) $1,\ 1-x,\ 1-x^2$.
(e) $x^2+x,\ x^2-x,\ x+1$

Ha igen, akkor határozza meg az

(1) $-x^2+2x+3$;
(2) ax^2+bx+c;

vektor koordinátáit a szóbanforgó bázisban.

Megoldás. Mintaként megvizsgáljuk a (b)-beli vektorrendszert.
<u>1. megoldás</u>: Azt kell megmutatni, hogy az $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$ polinomok lineárisan függetlenek és generálják $\mathbb{R}_3[x]$-et. Legyen

$$a\cdot 1+b\cdot(1+x)+c\cdot(1+x+x^2)=(a+b+c)+(b+c)\,x+c\,x^2=0 \text{ (a zéruspolinom!).}$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} a+b+c&=0,\\ b+c&=0,\\ c&=0\,. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek az egyetlen megoldása az $a=b=c=0$, tehát az $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$ polinomok lineárisan függetlenek (hiszen csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő a 0 polinomot).
Legyen ex^2+fx+g az $\mathbb{R}_3[x]$ tetszőleges eleme. Keressünk olyan $a,b,c\in\mathbb{R}$ együtthatókat, melyekre

$$a\cdot 1+b\cdot(1+x)+c\cdot(1+x+x^2)=ex^2+fx+g.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} a+b+c&=e,\\ b+c&=f,\\ c&=g\,. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek egy (és egyetlen) megoldása $a=e-f,\ b=f-g,\ c=g$, tehát az $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$ polinomok generálják $\mathbb{R}_3[x]$-t.

<u>2. megoldás</u>:
Mivel az $1,\ x,\ x^2$ polinomok egy bázisát alkotják $\mathbb{R}_3[x]$-nek, ezért $\dim\mathbb{R}_3[x]=3$, továbbá ha egy lineárisan független vektorrendszerhárom elemű, akkor bázis (8.5. Tétel). Tehát elegendő megmutatni, hogy az $1, 1+x, 1+x+x^2$ polinomok lineárisan függetlenek.

<u>3. megoldás</u>:
Mivel tudjuk, hogy $\dim\mathbb{R}_3[x]=3$, továbbá ha egy generátorrendszer három elemű, akkor bázis. Tehát elegendő megmutatni, hogy az $1, 1+x, 1+x+x^2$ polinomok generálják $\mathbb{R}_3[x]$-t.

17. Feladat. Határozza meg az u vektor koordinátáit az v_1, v_2, v_3, v_4 bázisban:

(a) $u = (1, 2, 1, 1)$,
$v_1 = (1, 1, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, -1, -1),\ v_3 = (1, -1, 1, -1),\ v_4 = (1, -1, -1, 1)$;
(b) $u = (0, 0, 0, 1)$,
$v_1 = (1, 1, 0, 1),\ v_2 = (2, 1, 3, 1),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (0, 1, -1, -1)$.

18. Feladat. Az a valós paraméter mely értékeire alkotnak az $(a, 1-a, a)$, $(2a, 2a-1, a+2)$ és $(-2a, a, -a)$ vektorok az $\mathbb{R}^3$ vektortérben bázist?

19. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben az $S = \{(a, b, c, d)\colon b+c+d = 0\}$ és $T = \{(a, b, c, d)\colon a + b = 0,\ c = 2d\}$ részhalmazok alteret alkotnak. Adjon meg az S, T és $S \cap T$ alterekben egy-egy bázist és határozza meg a dimenziójukat.

20. Feladat. Adja meg az $x_1, \dots, x_k$ és az $y_1, \dots, y_m$ vektorok által kifeszített $\mathbb{R}^4$-beli alterek összegének és metszetének egy-egy bázisát és határozza meg a dimenzióját:

(a) $x_1 = (1, 2, 1, 0),\ x_2 = (-1, 1, 1, 1),\qquad y_1 = (2, -1, 0, 1),\ y_2 = (1, -1, 3, 7)$;
(b) $x_1 = (1, 2, -1, -2),\ x_2 = (3, 1, 1, 1),\ x_3 = (-1, 0, 1, -1)$,
$y_1 = (2, 5, -6, -5),\ y_2 = (-1, 2, -7, -3)$;
(c) $x_1 = (1, 1, 0, 0),\ x_2 = (1, 0, 1, 1),\qquad y_1 = (0, 0, 1, 1),\ y_2 = (0, 1, 1, 0)$.

21. Feladat. A legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}_4[x]$ vektorterében a következő vektorrendszerek közül melyek alkotnak bázist?

(a) $\{1, x, x^2, x^3\}$,
(b) $\{1 + x, 1 - x, x^2, 3x^3\}$,
(c) $\{1, x + x^2, x^3\}$,
(d) $\{1 + x + x^2, 1 + x + 2x^2, 1 + x + 3x^2, x^3\}$,
(e) $\{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1\}$,
(f) $\{1, x, x^2 + x^3, 1 + x + x^2 + x^3\}$.

22. Feladat. Legyen $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$. Mutassa meg, hogy az

$$u_1 = (1, -1, 0, \dots, 0),\ u_2 = (1, 0, -1, \dots, 0),\ \dots\ ,\ u_{n-1} = (1, 0, 0, \dots, -1)$$

vektorok bázist alkotnak X-ben.

23. Feladat. Hány dimenziós a legfeljebb negyedfokú polinomok vektorterének azon altere, mely tartalmazza az összes olyan p legfeljebb negyedfokú polinomot, amire $p(1) = p(0)$?

24. Feladat. Legyen $E = \{(1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (2, 1, -1, 0, 1)\}$, és U az E által generált altér $\mathbb{R}^5$-ben. Keressünk olyan $F \subseteq E$ lineárisan független részrendszert, amelyre $[F] = U$.

25. Feladat. Legyen $X = \{x^3, x^3 - x^2, x^3 + x^2, x^3 - 1\}$, és $U = [X]$, az X átal generált altér $\mathbb{R}_4[x]$-ben. Keressünk olyan $Y \subseteq X$ lineárisan független részrendszert, amelyre $[Y] = U$.

26. Feladat. Mutassa meg, hogy az $X = \{x^2, 1 + x^2\}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}_3[x]$-ben. Generátorrendszere-e X az $\mathbb{R}_3[x]$-nek?. Ha nem, akkor bővítse generátorrendszerré (azaz keressen olyan Y halmazt, amelyre $X \subset Y$ és $[Y] = \mathbb{R}_3[x]$.)

27. Feladat. Legyen S az $\mathbb{R}^4$ vektortér $(1,-1,2,3)$, $(1,0,1,0)$ és $(3,-2,5,7)$ vektorokkal generált altere. Adjuk meg S-nek egy olyan bázisát, amelynek egyik eleme az $(1,1,0,-1)$ vektor.

28. Feladat. Bővítse $\mathbb{R}^4$ bázisává a

(a) $\{(1,-1,1,-1),(1,1,-1,1)\}$;
(b) $\{(2,1,-1,2),(2,3,-2,1),(4,2,-1,3)\}$;

lineárisan független vektorrendszereket.

29. Feladat.

(1) Keressen $\mathbb{R}^4$-ben két olyan bázist, melyeknek két közös eleme $(0,0,1,1)$ és $(1,1,0,0)$.
(2) Adjon meg $\mathbb{R}^4$-ben két bázist úgy, hogy az egyik tartalmazza az $(1,0,0,0)$ és $(1,1,0,0)$ vektorokat, a másik tartalmazza az $(1,1,1,0)$ és $(1,1,1,1)$ vektorokat, közös elemük viszont ne legyen.

Véges dimenziós vektorterek.

30. Feladat. Legyen V vektortér, X, Y alterek V-ben. Tegyük fel, hogy $\dim V = 10$, $\dim X = 8$ és $\dim Y = 9$. Melyek $\dim(X \cap Y)$ lehetséges értékei?

31. Feladat. A V vektortér két alterének, V_1-nek és V_2-nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsa be, hogy ekkor $\dim V_1 + \dim V_2 \leq \dim V$.

32. Feladat. Meg lehet-e adni egy 99 dimenziós vektortérben két 50 dimenziós alteret úgy, hogy csak a nullvektor a közös elemük?

33. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e a következő állítások:

(a) Ha egy V vektortérben $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, hogy $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ lineárisan függők.
(b) Ha egy V vektortérnek nincs 5 elemű generátorrendszere és nincs benne 3 elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor a V vektortér dimenziója 4.
(c) Ha egy V vektortérben $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, hogy $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ nem generálja V-t.
(d) Ha egy V vektortérnek nincs 5 elemű generátorrendszere, akkor a V vektortér dimenziója kisebb, mint 5.
(e) Ha az x_1, x_2, x_3, x_4 vektorok lineárisan függetlenek egy V vektortérben, és x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 lineárisan függők, akkor $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ egy bázisa V-nek.
(f) Egy 5 dimenziós vektortérben nincs 6-elemű lineárisan független vektorrendszer.
(g) Ha egy vektortérben van 4-elemű lineárisan független vektorrendszer és van 6-elemű generátorrendszer, akkor a vektortér 5 dimenziós.
(h) Egy generátorrendszer nem lehet valódi részhalmaza egy lineárisan független vektorrendszernek.
(i) Ha egy lineárisan független vektorrendszerhez a vektortér bármely elemét hozzávéve lineárisan függő vektorrendszert kapunk, akkor ez a vektorrendszer generátorrendszere a vektortérnek.
(j) Ha $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ generátorrendszere egy V vektortérnek, és $\{x_1, x_2, x_3\}$ nem generátorrendszer, akkor $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ egy bázisa V-nek.
(k) Egy 5 dimenziós vektortérben nincs 4-elemű lineárisan független vektorrendszer.

(l) Egy maximális lineárisan független vektorrendszerelemeinek lineáris kombinációjaként a vektortér minden eleme előáll.
(m) Egy 5 dimenziós vektortérben nincs 4-elemű generátorrendszer.
(n) Ha egy vektortérben van 8-elemű lineárisan független vektorrendszerés van 8-elemű generátorrendszer, akkor a vektortér 8 dimenziós.
(o) Ha egy bázis valamely elemét elhagyom, akkor a kapott vektorrendszer lineárisan független.
(p) Egy 5 dimenziós vektortérben nincs 7-elemű generátorrendszer.
(q) Ha egy generátorrendszer valamely elemét elhagyjuk, és az így kapott vektorrendszer lineárisan független, akkor a kapott vektorrendszer bázisa a vektortérnek.

Megoldás.

(a) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy bázisa V-nek, akkor a 8.2. Tétel szerint $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maximális lineárisan független vektorrendszer is, így a vektortér bármely elemét hozzávéve függővé válik. Tehát az állítás igaz.

(b) Minden olyan vektorrendszer, amely tartalmaz egy generátorrendszert, maga is generátorrendszer, tehát ha nincs 5 elemű generátorrendszer, akkor nincs 5-nél kevesebb elemű sem. Azaz minden generátorrendszer, és így minden bázis elemszáma nagyobb, mint 5. Másrészt a 7.3. Tétel szerint egy lineárisan független vektorrendszer minden részrendszere is lineárisan független, azaz ha nincs 3 elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor 3-nál több elemű sincs. Azaz minden lineárisan független vektorrendszer és így minden bázis elemszáma kisebb, mint 3. Azt kaptuk, hogy az állításunk egy olyan implikáció, amelynek első tagja minden vektortérben hamis (hiszen egy bázis elemszáma nem lehet egyszerre nagyobb, mint 5, és kisebb, mint 3), tehát az állítás igaz.

(c) Minden olyan vektorrendszer, amely tartalmaz egy generátorrendszert, maga is generátorrendszer, tehát az állítás hamis.

(e) Az állítás hamis, például ha $V = \mathbb{R}^5$ és $x_1 = (1,0,0,0,0)$, $x_2 = (0,1,0,0,0)$, $x_3 = (0,0,1,0,0)$, $x_4 = (0,0,0,1,0)$, $x_5 = x_1$, akkor x_1, x_2, x_3, x_4 lineárisan független, és x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 lineárisan függő, de persze $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ nem bázisa V-nek, mivel $\mathbb{R}^5$ minden bázisa 5 elemű.