József Attila Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Funkcionál-differenciálegyenletek stabilitásának vizsgálata Ljapunov funkcionálok segítségével

Makay Géza
matematikus szak

Témavezető: dr. Hatvani László
Bolyai Intézet, Analízis Tanszék

1991.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A differenciálegyenletek olyan függvényegyenletek, amelyekben az ismeretlen (az esetek többségében $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$) függvény differenciálhányadosai is előfordulnak. A differenciálegyenletek az olyan időben változó folyamatok leírására használhatók, amelyekben a változás gyorsasága, gyorsulása, ... kifejezhető a függvény értékeivel. Ha a differenciálegyenletben csak azonos időpontbeli függvényértékek és differenciálhányadosfüggvény-értékek szerepelnek, akkor a differenciálegyenletet közönséges differenciálegyenletnek nevezzük. Például, ha egy fizikus azt mondja egy matematikusnak, hogy az egységnyi idő alatt elbomló radioaktív anyag mennyisége arányos a meglevő anyag mennyiségével, azt a matematikus a következő differenciálegyenletben fejezheti ki: $\dot{x}(t) = -kx(t)$, ahol t az idő, $x(t)$ a t időpillanatban meglevő anyag mennyisége és k egy pozitív arányossági tényező. A pont az x felett a t szerinti deriválás jele. Általában a t-t el szokták hagyni az egyenletből, hiszen mindig idő szerinti deriváltat kell venni és a közönséges differenciálegyenletek esetében mindent a t időpontban kell tekinteni. A differenciálegyenlet megoldásának olyan függvényt lehet tekinteni, amelyik kielégíti a differenciálegyenletet.

A közönséges differenciálegyenleteket az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ alakban vizsgáljuk. Gyakorlati szempontból az ún. kezdetiérték-probléma megoldása a legfontosabb. A kezdetiérték-probléma a differenciálegyenletből és a függvény egy adott (kezdeti) időpontban megadott (kezdeti) értékéből áll, ami $\mathbf{R}^n$-nek eleme. Ezen kezdetiérték-probléma megoldásán olyan függvényt értünk, amely a differenciálegyenletet és a kezdeti feltételt is kielégíti. Általában feltesszük, hogy a kezdetiérték-problémának egyértelmű megoldása van. Például vegyük ismét a radioaktív anyag differenciálegyenletét. A kezdetiérték-probléma a következő alakú:

$$\dot{x} = -kx \qquad x(t_0) = x_0,$$

ahol $t_0, x_0 \in \mathbf{R}$. A kezdeti feltétel ebben az esetben azt jelenti, hogy a t_0 időpontban meglevő anyagmennyiség x_0, és ebből kellene meghatározni a t időpontban a radioaktív anyag mennyiségét. Ennek a kezdetiérték-problémának egyetlen megoldása az $x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$ függvény.

Tekintsünk másik példaként egy tömeggel rendelkező anyagi pontot, amely egy rögzített ponthoz rugóval kikötve egyenes vonal mentén rezeg. Szavakban megfogalmazva a mozgási szabályt: az egyensúlyi helyzetbe visszatérítő erő arányos a kitérés mértékével (rugóállandó). Az erő pedig, mint ismeretes, egyenesen arányos a gyorsulással és az arányossági tényező a tömeg. Felírhatjuk tehát a differenciálegyenletet: $m\ddot{x} = -kx$, ahol a k pozitív arányossági tényező a rugóállandó és m a tömeg. Ez továbbra is közönséges differenciálegyenlet, ha elvégezzük a következő átalakítást: $y_1(t) := x(t)$, $y_2(t) := \dot{x}(t)$, vagyis az egyenlet az $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = -(k/m)y_1$ alakúvá válik, amit $\mathbf{y} := (y_1, y_2)$, $f(y_1, y_2) := (y_2, -(k/m)y_1)$ jelöléssel $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$ alakra hozhatunk, ahol az ismeretlen függvény az $\mathbf{y} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$. A kezdetiérték-probléma most bonyolultabb, mert az x kezdeti értéke egyedül nem határozza meg egyértelműen a rendszer állapotát, nyilván nem mindegy milyen kezdeti sebességgel indítjuk el a rendszert a kezdeti időpontban. Ezt a másságot az egyenlet átalakítását figyelembe véve úgy is felfoghatjuk, hogy "kezdeti értéken" természetes módon az $\mathbf{y}$ függvény kezdeti értékét kell érteni. Igy tehát a kezdetiérték-probléma a következő alakot ölti:

$$\ddot{x} = -(k/m)x \qquad x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x_1,$$

avagy vektoriális alakban

$$\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}) \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

Az előbbi kezdetiérték-problémának felírható az egyértelmű megoldása, ami az $x(t) = x_0 \cos \sqrt{k}(t - t_0) + x_1 \sin \sqrt{k}(t - t_0)$ függvény. Az utóbbi kezdetiérték-probléma megoldása ez alapján könnyen kapható $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = \dot{x}(t)$.

Mint láttuk a gyakorlati élet néhány problémájára modellként differenciálegyenlet írható fel, amelyet megoldva a jövőre vonatkozó jóslásokat lehet tenni. Az esetek többségében viszont nem közönséges differenciálegyenlet a modell. Erre egy biológiai példát lehet mutatni. A baktériumok osztódással szaporodnak, de egy a t időpillanatban osztódott baktériumból származó új egyedek nem képesek azonnali további osztódásra, bizonyos időnek el kell telnie az osztódásra való "felkészüléssel". Ilyen késleltetés az egyenes vonal mentén rezgő anyagi pont esetén nincs, mert a kitérés a rugót megfeszítve okozza a visszatérítő erőt, ami azonnal hat. A baktériumok számának növekedése viszont a fentiek alapján nem a pillanatnyi időpontban létező baktériumok számával arányos, hanem egy korábbi időpontbelivel. A differenciálegyenlet tehát a követező alakú: $\dot{x}(t) = kx(t-r)$, ahol r az az idő, amely a baktériumoknak az osztódásra való felkészüléshez kell, a k pedig azt mondja meg, hogy a már osztódóképes baktériumok hányad része osztódik egységnyi idő alatt. Az olyan differenciálegyenleteket, amelyben az ismeretlen függvénynek nem csak a t időpontbeli értéke fordul elő, funkcionál-differenciálegyenletnek nevezzük. Vizsgáljuk meg, hogy a kezdetiérték-probléma hogyan néz ki ebben az esetben. Szemmel láthatólag nem elegendő megadni a kezdeti időpontban vett értéket, hiszen a differenciálegyenlet visszanyúl értékekért a múltba is. Vagyis meg kell adnunk "kezdeti értékként" a függvényt azon az egész múltbeli intervallumon, ameddig a differenciálegyenlet egyáltalán visszanyúl. A példabeli esetben a differenciálegyenlet mindig r mélységben vizsgálja a függvényt, így a kezdetiérték-problémában a függvény $[t_0 - r, t_0]$ intervallumon felvett értékeit kell megadnunk. Jelölésben az x_t jelenti az x függvény t időponthoz képesti múltját, vagyis x_t az a függvény, amely teljesíti az $x_t(s) = x(t+s)$ feltételt $s \leq 0$-ra. Igy a kezdetiérték-probléma a következő alakú:

$$\dot{x} = f(t, x_t) \qquad\qquad x_{t_0}(s) = \phi(s) \qquad s \leq 0.$$

A funkcionál-differenciálegyenleteknek két fő típusa van. Az első az ún. végesen retardált differenciálegyenlet, amelyben a függvény t pontbeli differenciálhányadosa csak a függvény $[t-r, t]$ intervallumon felvett értékétől függhet, ahol r rögzített pozitív konstans. A második típus a végtelen retardálású differenciálegyenlet, amelyben a függvény t pont beli differenciálhányadosa a függvény $(-\infty, t]$ intervallumon felvett értékeitől függ, vagyis az egész múltbeli viselkedésétől. Gyakorlati szempontból fel lehetene venni egy harmadik csoportot is, amelyiknél a differenciálegyenlet nem nyúl vissza egy rögzített időpontnál előbbre, de ennek kezelése nem sokkal könnyebb, mint a második típusé, ezért nem szokták külön kiemelni.

Végesen retardált differenciálegyenletre már láttunk példát a baktériumok osztódásának vizsgálatánál. Igen meglepő, de a differenciálegyenletek használhatók a számelméletben is. Hale könyvében [**6**, bevezetés] található meg a következő a prímszámok eloszlására vonatkozó végesen retardált differenciálegyenlet: $\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)]$, ahol α konstans. Azért meglepő ez a példa, mert a differenciálegyenletekben a folytonosság fontos szerepet játszik, a prímszámok pedig diszkrét pontok a számegyenesen.

Most bemutatunk végesen retardált differenciálegyenletre egy bonyolultabb biológiai példát, amely jól szemlélteti a differenciálegyenletek felírásának menetét is. A levezetéssel illetve a kapott differenciálegyenlet vizsgálatával foglalkozik Somolinos cikke [**10**].

Vizsgáljuk a növények növekedését. A biológusok megállapították, hogy a növekedésért egy auxin nevű növekedési hormon felelős, ahova ez a hormon koncentrálódik, ott a növény gyorsabban nő, mint máshol. Az auxin koncentrációját viszont a növény helyzete határozza meg, ha a növény valamelyik oldalra dől, akkor az auxin arra az oldalra koncentrálódik, amelyik "rövidebb", így ezzel kiegyenesíti a növényt. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a feladatot két dimenzióban.

Legyen L_1, L_2 a növény szárának hossza a bal- és a jobboldalon és C_1, C_2 az auxin koncentráció a megfelelő oldalakon. Mint tudjuk, az auxin okozza a növekedést, más szóval a szár hosszának növekedését. A biológusok vizsgálatai szerint az egységnyi időre jutó hossznövekedés egyenesen arányos az auxin koncentrációjával, vagyis

$$\frac{dL_i}{dt} = K_1 C_i \qquad i = 1, 2. \tag{i}$$

Az auxin koncentráció változását a növény helyzete határozza meg, vagyis ebben az esetben a szár függőlegestől való eltérésének szöge. A t időpontban a két oldalon mérhető koncentráció különbsége az α dőlésszög szinuszától függ, de nem a t időpontbeli szög szinuszától, mert a növénynek elő kell állítania az auxint és a megfelelő helyre továbbítania, amihez idő kell. Ez a késleltetési idő növényfajtánként és a hőmérséklettől függően változik. Ráadásul nem csak egy adott időpillanatban vett szögtől függ a koncentráció, hanem az az előtti állapottól is, noha kisebb mértékben. Ezt egy integrállal lehet kifejezni, ahol a szög szinuszának együtthatója az abban a pillanatban vett szögszinusz t időpontbeli hatásának nagyságát írja le.

$$C_2(t) - C_1(t) = K_2 \int_1^\infty e^{-a(s-1)} \sin\alpha(t - sr) ds, \qquad (ii)$$

ahol r a késleltetési idő, a pedig azt határozza meg, hogy a $t - r$ időpont előtti dőlésszög milyen mértékben hat a t időpontbeli koncentrációra. Most nézzük meg, hogy az α szög hogyan függ a szár bal- és jobboldali hosszától, illetve a d átmérőtől. Az egyszerűség kedvéért induljunk ki a függőleges helyzetből ($\alpha = 0$). Δt idő múlva a baloldali szár ΔL_1, a jobboldali ΔL_2 hosszal növekszik, és tegyük fel, hogy $\Delta L_1 > \Delta L_2$, ami miatt a szár jobbra dől $\Delta\alpha$ szöggel. Ebből kapjuk, hogy $d\Delta\alpha = \Delta L = \Delta L_1 - \Delta L_2$, amiből Δt-t nullához tartatva a

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{d}\left(\frac{dL_1}{dt} - \frac{dL_2}{dt}\right)$$

egyenlőséget vezethetjük le. Felhasználva az (i) egyenlőséget

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{d} K_1 (C_1 - C_2) = \frac{-K_1}{d} (C_2 - C_1).$$

Ezt összekombinálva a (ii) egyenlőséggel megkapunk egy differenciálegyenletet:

$$\dot{\alpha} = -b \int_1^\infty e^{-a(s-1)} \sin\alpha(t - sr) ds,$$

ahol $b = K_1 K_2 / d$. Elvégezve az $\omega = sr - t$ helyettesítést

$$\dot{\alpha} = -\frac{b}{r} \int_{r-t}^\infty e^{-a\frac{\omega + t - r}{r}} \sin\alpha(-\omega) d\omega,$$

amit differenciálva megkapjuk az ún. napraforgó egyenletet:

$$\ddot{\alpha} + \frac{a}{r}\dot{\alpha} + \frac{b}{r}\sin\alpha(t - r) = 0.$$

Ez egy végesen retardált funkcionál-differenciálegyenlet az a, b, r konstansokkal. További vizsgálatok céljából ezt az egyenletet is átírjuk vektoriális alakba, amikor is az $\beta_t = \dot{\alpha}_t$ jelölést használva

$$\dot{\alpha}(t) = \beta(t) \qquad \dot{\beta}(t) = -(a/r)\beta(t) - (b/r)\sin\alpha(t-r)$$

differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk.

Vizsgáljunk meg most egy végtelen retardálású differenciálegyenletre vezető gyakorlati példát, de a levezetést most nem mutatjuk meg, mert az igen hosszadalmas. Ergen [**5**] az atomreaktorokra írt fel differenciálegyenletet. Életbevágóan fontos, hogy ismerjük az atomreaktorok viselkedését, hiszen a rossz konstrukciójú reaktorok felrobbanhatnak. Két egymásnak ellentmondó követelményt kell kielégítenünk: egyrészt a reaktor hőmérsékletét alacsony szinten kell tartanunk, mert különben robban, másrészt magasabb hőmérsékleten a reaktor nagyobb teljesítményt ad le, így gazdaságosabban üzemeltethető. Azt a hőmérsékletet, amelyen a reaktor (szabályozó berendezések nélkül) "megszalad", felrobban, kritikus hőmérsékletnek nevezik. A reaktorokat tehát úgy tervezik meg, hogy a kritikus hőmérséklethez közeli hőmérsékleten üzemeljenek, amihez viszont valóban ismernünk kell a hőmérsékletet és teljesítményt szabályozó törvényeket.

Legyen $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a reaktor hőmérsékletének a kritikustól való eltérése, $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pedig a leadott teljesítmény, mindkettő az idő függvénye. A fenti cikkben Ergen levezette a reaktor egyenletét, és a következőt kapta:

$$\begin{aligned} \frac{d\log P(t)}{dt} &= -\frac{\alpha}{\tau}T(t), \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \varepsilon\left[P(t) - \int_0^\theta K(s)P(t-s)ds\right], \end{aligned}$$

ahol $\alpha, \tau, \varepsilon, \theta$ a reaktor tulajdonságaitól függő konstansok, $K : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ pedig teljesíti az $\int_0^\infty K(s)ds = 1$ és a $K(s) = 0$ $(s \geq \theta)$ feltételt. Az első egyenlet azt fejezi ki, hogy a reaktor teljesítménye aszerint nő vagy csökken, hogy a hőmérséklet a kritikus alatt vagy felett van. Ezt a hatást a reaktorba épített szabályozórendszer okozza, hogy a hőmérsékletet a kritikushoz közel tartsa. A második egyenlet szerint a hőmérsékletváltozás egyenesen arányos a pillanatnyi teljesítmény és a $[t-\theta, t]$ időintervallumon vett teljesítmény egy átlagának különbségével. Óhatatlanul eszébe jut az embernek, hogy miért csak egy θ hosszú múlt hathat a jelen pillanatbeli hőmérsékletre, miért nem az egész múlt. Ezalapján a második egyenlet átírható a következő alakba:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \varepsilon \left[P(t) - \int_0^\infty K(s)P(t-s)ds \right],$$

ahol $K : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ továbbra is teljesíti az $\int_0^\infty K(s)ds = 1$ feltételt. Ez már valóban egy végtelen retardálású differenciálegyenlet.

A közönséges differenciálegyenletek, de főleg a funkcionál-differenciálegyenletek kezdetiérték-problémái általában nem oldhatók meg úgy, hogy fel lehetne írni a megoldást elemi függvények ($\sin(t)$,$\cos(t)$,$\log(t)$,e^t,...) és integrálás segítségével. Másrészt, ha meg is lehet oldani, akkor is a differenciálegyenlet önmagában csak egy közelítés, a kezdeti értékeket is csak bizonyos pontossággal tudjuk mérni, ami még nagyobb hibát okozhat az előrejelzésekben. Ezért szükség van olyan vizsgálati módszerekre, amelyek olyasmit becsülnek meg, hogy a kezdeti értékek elegendően pontos ismeretében milyen pontos lesz az jóslat a modell alapján. Ehhez nyilván hozzátartozik az is, hogy ha feltesszük, hogy a modell helyesen írja le a folyamatot, akkor a kezdeti érték mérési hibája hogyan befolyásolja az eredményt. Ezen dolgozat keretein belül nem tudunk azzal foglalkozni, hogy egy differenciálegyenlet mennyire pontosan közelíti a valóságot, ezt különben is csak az adott speciális esetekben lehet megvizsgálni. Igy tehát csak a mérési pontatlanságokból eredő hibákat fogjuk vizsgálni. Egy ilyen vizsgálati módszer a stabilitásvizsgálat.

Azt mondjuk, hogy a differenciálegyenlet egy megoldása stabilis, ha tetszőleges jóslási pontossághoz megadható egy kezdetiérték-mérési pontosság úgy, hogy ha azt betartjuk, akkor a jóslat a megkövetelt pontosságon belül lesz.

Álljunk meg itt egy pillanatra. Mit jelent ez a "mérési pontosság"? Közönséges differenciálegyenletek esetén egyszerűbb elképzelni. A legelső példánál maradva be lehet bizonyítani, hogy ha kezdetben a radioaktív anyag mennyiségét például $0.1g$ pontossággal ismerjük, akkor a jóslatunk bármely későbbi időpontban is legalább ennyire pontos lesz. Sőt azt is be lehet látni, hogy az idő előrehaladtával a mérési pontatlanságból eredő hiba elenyészik. Ezt aszimptotikus stabilitásnak nevezik, mert csak t növekedésével érhető el az egyre nagyobb pontosság. Ha a második példát vesszük, akkor a mérési hibát nyilván a kitérés és a sebesség mérési hibájából kell kiszámítani. Általában közönséges differenciálegyenletekre (ha az ismeretlen függvény $\mathbf{R}^n$-be képez) a hibát $\mathbf{R}^n$ valamely normájával kell mérni, csakhogy az $\mathbf{R}^n$ véges dimenziós, így a rajta levő normák ekvivalensek. Funkcionál-differenciálegyenletekre teljesen más az eset. Ott a közönséges differenciálegyenletekhez hasonló módon a kezdeti függvény valamely normájával mérnénk a hibát, csakhogy a függvények tere végtelen dimenziós, így azokra többféle norma van, amelyek nem ekvivalensek. Ráadásul nem kell feltétlenül normát használnunk, elég egy bármilyen nemnegatív függvény, ami azért valamennyire normaszerűen viselkedik. Sokszor bizonyos típusú stabilitások vizsgálatánál normákkal nem is lehet boldogulni. Ebben a dolgozatban használatos "norma"-fajták az L^1, L^2-normák, a szuprémum norma, és a függvény egy pontban felvett értékének abszolút értéke, ami csak pszeudonorma.

Egyik legismertebb stabilitásvizsgálati módszer az ún. Ljapunov-módszer. Az ötlet, mint majdnem minden a differenciálegyenletek elméletében, a fizikából származik. Tegyük fel, hogy sikeresen felírtunk egy modellt a fizikai jelenségre, ami például egy mozgás. Elemi fizikai törvény az energiamegmaradás törvénye. Vagyis, ha felírjuk a rendszer teljes energiáját, akkor konzervatív mechanikai rendszerekben az a mozgások mentén állandó lesz. A surlódás, légellenállás miatt elvesző energiát figyelembe véve kapjuk, hogy az összeszámított energia a mozgások mentén (nem szigorúan) csökken. Ljapunov érdeme az, hogy felfedezte, ezt a módszert nem csak mechanikai rendszerek stabilitásának vizsgálatára lehet használni, hanem bármilyen differenciálegyenletre. Keressünk olyan függvényt (Ljapunov-függvényt), amely ilyen energiszerűen viselkedik, ami a differenciálegyenlet megoldásai mentén csökken, és ebből az energiafüggvényből becsüljük meg a hibák nagyságát.

Közönséges differenciálegyenletek elméltében a Ljapunov-módszer egyszerűen használható, mert a lehetséges normák viszonylag kis száma nagy segítségünkre van. Funkcionál-differenciálegyenletre is van jónéhány Ljapunov-módszerrel stabilitást vizsgáló tétel általában csak véges retardálásra, de azokban kell egy elég erős feltétel ahhoz, hogy a módszert használni tudjuk. Ez a bizonyos feltétel az $\dot{x} = f(t, x_t)$ egyenletben a f függvény t-ben való korlátosságát írja elő, ezért a továbbiakban korlátossági feltételnek nevezzük. Az a baj ezzel a feltétellel , hogy ez (mivel a differenciálegyenlet adott) vagy teljesül f-re vagy nem. Ezért szükség van olyan Ljapunov-módszerrel stabilitást vizsgáló tételre is, amikor az f ezt a korlátossági feltételt nem teljesíti, illetve meg kell vizsgálni mennyire fontos ez a feltétel a bizonyításokban. Tanulmányozni fogjuk, hogy funkcionál-differenciálegyenletekre ez a feltétel miért szükséges, és ez alapján példát mutatunk bizonyos esetekben, hogy a korlátossági feltétel nem hagyható el. Ezen kívül felhasználjuk a Ljapunov-módszert végtelen retardálású funkcionál-differenciálegyenletek stabilitásvizsgálatára olyan esetekben, amikor az f nem teljesíti a korlátossági feltételt.

2. Alapfogalmak

A dolgozatban a következő jelöléseket használjuk: $\mathbf{R}$ a valós számok, $\mathbf{R}_+$ a nemnegatív valósak, $\mathbf{R}_-$ a nempozitív valósak jele. Jelöljük $\mathcal{C}^r$-rel a $[-r,0]$ intervallumon értelmezett $\mathbf{R}^n$-be képező folytonos függvényeket, ahol n pozitív egész, és $r>0$ valós szám vagy $r=\infty$ (utóbbi esetben a $[-r,0]$ intervallumon értsük a $(-\infty,0]$-t). Legyen $\mathcal{K}$ az $\mathbf{R}_+$-on értelmezett $\mathbf{R}_+$-ba képező szigorúan monoton növekvő W függvények halmaza, amelyekre $W(0)=0$. Ha $x:[t_0-r,T)\to\mathbf{R}^n$ adott függvény és $t_0\le t<T$, akkor x_t jelentse azt a $\mathcal{C}^r$-beli függvényt, amelyre az $x_t(s)=x(t+s)$, ha $r\le s\le 0$. Tekintsük a következő differenciálegyenletet

$$\dot{x}=f(t,x_t), \tag{2.1}$$

ahol az $f:\mathbf{R}\times\mathcal{C}^r\to\mathbf{R}^n$ funkcionál teljesíti az $f(t,0)=0$ feltételt minden $t\in\mathbf{R}$-re. A kezdetiérték-probléma erre az egyenletre a következő alakot ölti:

$$\dot{x}=f(t,x_t)\qquad x_{t_0}=\phi,$$

ahol $t_0\in\mathbf{R}$ és $\phi\in\mathcal{C}^r$. Legyen ennek a kezdetiérték-problémának az $x(t;t_0,\phi)$ függvény egy megoldása. Nem biztos, hogy ez egyértelmű. Nyilvánvaló módon az $x=0$ megoldás.

Először a stabilitásfogalmat közönséges differenciálegyenletekre vezetjük be, amit később általánosítunk funkcionál-differenciálegyenletekre. Legyen adott az $\dot{x}=f(t,x)$ közönséges differenciálegyenlet, és a t_0 időpontban x_0 kezdeti feltételnek eleget tevő egy megoldást jelöljük $x(t;t_0,x_0)$-lal. Az $|\cdot|$ legyen az $\mathbf{R}^n$ egy tetszőleges normája.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x(t;t_0,x_0)$ megoldás *stabilis*, ha bármely $t_0\in\mathbf{R}$-re $\varepsilon>0$-ra létezik $\delta(\varepsilon,t_0)>0$, hogy a $|x-x_0|<\delta$ feltételből következik, hogy $|x(t;t_0,x)-x(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$ minden $t\ge t_0$-ra. A *stabilitás egyenletes*, ha a fenti definícióban szereplő δ nem függ t_0-tól. A megoldást *aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha stabilis és bármely $t_0\in\mathbf{R}$-re létezik $\gamma(t_0)>0$, hogy ha $|x-x_0|<\gamma$, akkor $|x(t;t_0,x)-x(t;t_0,x_0)|\to 0$ miközben $t\to\infty$. A megoldás *egyenletesen aszimptotikusan stabilis*, ha egyenletesen stabilis, γ független t_0-tól és a 0-hoz tartás is egyenletes t_0-ban.

Példaként ellenőrizzük azt a bevezetőben említett állítást, amely matematikai terminusokkal kimondva azt fejezi ki, hogy a radioaktív anyag bomlását leíró differenciálegyenlet megoldásai egyenletesen aszimptotikusan stabilisak (ld. a $0.1g$-os mérési hibát). Szerencsére ebben az esetben ismerjük az összes megoldást, és ezek az $x(t;t_0,x_0) = x_0e^{-k(t-t_0)}$. Először az egyenletes stabilitást ellenőrizve állításunk szerint a $\delta = \varepsilon$ választás megfelelő az egyenletes stabilitás definíciójában. Valóban, ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|x(t;t_0,x) - x(t;t_0,x_0)| = |xe^{-k(t-t_0)} - x_0e^{-k(t-t_0)}| = |x - x_0|e^{-k(t-t_0)} \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$, hiszen az e kitevője negatív. Ugyanígy az egyenletes aszimptoticitás vizsgálatánál bármilyen $\gamma > 0$ megfelel, hiszen $|x(t;t_0,x) - x(t;t_0,x_0)| \leq \gamma e^{-k(t-t_0)}$, ami valóban 0-hoz tart, méghozzá t_0-ban egyenletesen.

Most, hogy láttunk rá példát könnyen elképzelhető, hogy milyen gondokat okozhat az, hogyha a kezdetiérték-problémák megoldása nem egyértelmű. Ugyanis, ha van két megoldás ugyanolyan kezdeti feltételekkel (legyenek ezek $x(t;t_0,x_0)$ és $y(t;t_0,x_0)$), akkor az x megoldás nem lehet stabilis, hiszen ha t_1 olyan, hogy $x(t_1;t_0,x_0) \neq y(t_1;t_0,x_0)$, akkor ε-t $|x(t_1;t_0,x_0) - y(t_1;t_0,x_0)|$-nél kisebbre választva nem lehet megfelelő δ-t találni.

Szükségünk van tehát olyan tételekre, amelyek kimondják, hogy a kezdetiérték-problémának egyértelmű megoldása van.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x(t;t_0,x_0)$ megoldás *folytonosan függ az x_0 kezdeti feltételtől*, ha bármely $t > t_0$-ra és bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(\varepsilon,t,t_0) > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$-ből következik, hogy $|x(t;t_0,x) - x(t;t_0,x_0)| < \varepsilon$.

Szemmel láthatóan ez a stabilitásnál jóval gyengébb feltétel, egy pontban követeli meg azt, amit a stabilitás definíciója minden t-re. Ezért most hivatkozunk olyan tételekre, amelyek funkcionál-differenciálegyenletek kezdetiérték-problémáinak egyértelmű megoldhatóságát és a megoldások ϕ kezdeti feltételtől való folytonos függését mondják ki. Ilyen tételek megtalálhatók Hale könyvében [**6**, 2.2, 2.3 és 2.4 fejezet].

A továbbiakban feltesszük, hogy minden $t_0 \in \mathbf{R}$-re és $\phi \in \mathcal{C}^r$-re létezik egy egyértelmű $x(\cdot;t_0,\phi)$ megoldása a (2.1) differenciálegyenletnek, amelyre $x_{t_0} = \phi$. Azt is feltesszük, hogy az x megoldás folytonosan függ a ϕ kezdeti feltételtől.

Legyen $V : \mathbf{R} \times \mathcal{C}^r \to \mathbf{R}$ folytonos funkcionál.

Definíció. Bevezetjük a V *funkcionál* (2.1) *differenciálegyenlet szerinti deriváltját:*

$$\dot{V}(t,\phi) = \dot{V}_{(2.1)}(t,\phi) = \limsup_{\delta\to 0+} \frac{V(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot;t,\phi)) - V(t,\phi)}{\delta}.$$

A definíció szemmel láthatólag felhasználja a differenciálegyenlet megoldását is, ennek ellenére bizonyos símasági feltételek mellett a $\dot{V}(t,\phi)$ nem függ a megoldástól, illetve ki lehet számolni csak a differenciálegyenlet segítségével.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $V : \mathbf{R} \times \mathcal{C}^r$ funkcionál lokálisan Lipshitz tulajdonságú, ha minden $t \in \mathbf{R}$, $\phi \in \mathcal{C}^r$-re létezik egy olyan U környezete a (t,ϕ)-nek $\mathbf{R} \times \mathcal{C}^r$-ben és egy olyan $L(U) > 0$ szám, hogy ha $(t,\psi),(t,\chi) \in U$, akkor $|V(t,\psi) - V(t,\chi)| \leq L(U)\|\psi - \chi\|$.

Driver bebizonyított a cikkében [**4**] néhány olyan lemmát, amelyek segítségével a következő lemmához juthatunk.

2.1. Lemma. Ha V folytonosan differenciálható és lokálisan Lipshitz tulajdonságú, akkor

$$\dot{V}_{(2.1)}(t,\phi) = \frac{\partial}{\partial t}V(t,\phi) + (\frac{\partial}{\partial \phi}V(t,\phi))f(t,\phi).$$

Ezeket a feltételeket ezentúl mindig megköveteljük V-től külön kimondásuk nélkül is, hogy a $\dot{V}$ ilyen alakban való felírhatóságát biztosítsuk. Ha jobban megnézzük, akkor ez a felírás nagyon emlékeztet a differenciálásból ismert láncszabályra (összetett függvény differenciálhányadosa), ami nem véletlen, hiszen ha a megoldást behelyettesítjük V-be és azt t szerint differenciáljuk, akkor pontosan ezt a képletet kapjuk behelyettesítve a megoldást.

Nézzünk példát ilyen funkcionálra és a differenciálegyenlet szerinti deriváltra. Tekintsük a napraforgó egyenletét, ott is a differenciálegyenlet-rendszerként felírt alakot. A V most függhet t-től és α_t, β_t-től. Legyen tehát

$$V(\alpha_t, \beta_t) = 2\frac{b}{r}(1 - \cos(\alpha(t))) + \beta^2(t) + \nu^2 \int_{-r}^{0}\int_{t+u}^{t} \beta^2(s)dsdu,$$

ahol $\nu^2 > 0$ konstans. Vegyük most a differenciálegyenlet szerinti deriváltat az utóbbi egyenlőség szerint.

$$\dot{V}(\alpha_t, \beta_t) = 2\frac{b}{r}\sin(\alpha(t))\beta(t) + 2\beta(t)(-\frac{a}{r}\beta(t) - \frac{b}{r}\sin\alpha(t-r)) + \nu^2 \int_{-r}^{0} \beta^2(t) - \beta^2(t+u)du$$

A későbbi vizsgálatok kedvéért egy kicsit továbbalakítjuk:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\alpha_t,\beta_t) = &-\left(2\frac{a}{r}-\nu^2 r\right)\beta^2(t)+2\frac{b}{r}\beta(t)\int_{-r}^{0}\cos(\alpha(t+s))\beta(t+s)ds \\
&-\nu^2\int_{-r}^{0}\beta^2(t+u)du \leq \\
&-\left(2\frac{a}{r}-\nu^2 r\right)\beta^2(t)-\int_{-r}^{0}\nu^2\beta^2(t+u)-2\frac{b}{r}|\beta(t)\beta(t+u)|du = \\
&-\left(2\frac{a}{r}-\nu^2 r\right)\beta^2(t)-\int_{-r}^{0}\left(\nu|\beta(t+u)|-\frac{b|\beta(t)|}{r\nu}\right)^2-\left(\frac{b|\beta(t)|}{r\nu}\right)^2 du \leq \\
&-\left(2\frac{a}{r}-\nu^2 r-\frac{b^2}{r\nu^2}\right)\beta^2(t)
\end{aligned}$$

A V a bevezetőben emlegetetett Ljapunov-funkcionál (energiaszerű függvény), amelynek segítségével stabilitást és aszimptotikus stabilitást vizsgálunk. Ha jól megfigyeljük, a V valóban energiaszerűen viselkedik: nemnegatív, $V(0,0)=0$, és a differenciálegyenlet szerinti deriváltja (ha ν-t meg lehet úgy választani) nempozitív. Ez azt jelenti, hogy ha V-be megoldást helyettesítünk, akkor az monoton nem növekvő függvényt ad t-ben, hiszen a deriváltja nempozitív.

Most pedig definiáljuk teljes általánosságában a stabilitás és aszimptotikus stabilitás fogalmát funkcionál-differenciálegyenletekre. A feladat tulajdonképpen az, hogy megtaláljuk $\mathcal{C}^r$-en azokat a normákat, mértékeket, amelyekkel a "különbözést" mérjük.

Definíció. Egy $h:\mathbf{R}\times\mathcal{C}^r\to\mathbf{R}_+$ függvényt *mértéknek* nevezzük $\mathcal{C}^r$-en, ha $h(t,0)=0$. Néhány példa normákra:

$$\|\phi\|=\max\{|\phi(s)|: s\in[-r,0]\},\qquad |||\phi|||=\sqrt{\int_{-r}^{0}|\phi(s)|^2\mathrm{d}s},$$

ahol $|\cdot|$ egy tetszőleges norma $\mathbf{R}^n$-en, $\phi\in\mathcal{C}^r$. Példa mértékre: $|\phi(0)|$.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a (2.1) differenciálegyenlet $x(t;t_0,\phi)$ megoldása *stabilis a h_0,h mértékek szerint* vagy *(h_0,h)-stabilis*, ha minden $\varepsilon>0$-ra létezik $\delta(\varepsilon,t_0)>0$, hogy ha $h_0(t_0,\psi-\phi)<\delta$ valamely $\psi\in\mathcal{C}^r$-re, akkor $h(t,x_t(\cdot;t_0,\psi)-x_t(\cdot;t_0,\phi))<\varepsilon$ minden $t\geq t_0$-ra. Azt mondjuk, hogy az $x(t;t_0,\phi)$ megoldás *aszimptotikusan stabilis a h_0,h mértékek szerint* vagy *aszimptotikusan (h_0,h)-stabilis*, ha (h_0,h)-stabilis és létezik $\gamma(t_0)>0$, hogy ha $h_0(t_0,\psi-\phi)<\gamma$, akkor $h(t_0+T,x_{t_0+T}(\cdot;t_0,\psi)-x_{t_0+T}(\cdot;t_0,\phi))\to 0$

miközben $T \to \infty$. A *stabilitás egyenletes*, ha a stabilitás definíciójában szereplő δ nem függ t_0-tól. A megoldást *egyenletesen aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha egyenletesen stabilis és az aszimptotikus stabilitás definíciójában a konvergencia t_0-ban egyenletes.

Ezek nagyon általános definíciók. Nem fogjuk a differenciálegyenletek nem azonosan nulla megoldásainak stabilitását vizsgálni, mert az visszavezethető egy másik differenciálegyenlet nulla megoldásának stabilitására a következő módon: az $\dot{x} = f(t, x_t)$ egyenlet $y(t)$ megoldása akkor és csak akkor (egyenletesen) (aszimptotikusan) stabilis, ha (elvégezve az $x(t) = z(t) + y(t)$ helyettesítést) az $\dot{z} = f(t, z_t + y_t) - \dot{y}(t)$ egyenlet $z = 0$ megoldása (egyenletesen) (aszimptotikusan) stabilis. Azért tehettük fel a (2.1) differenciálegyenlet felírásakor, hogy $f(t, 0) = 0$, mert az ilyen módon átalakított egyenletben ez mindig teljesül.

A továbbiakban, amíg mást nem mondunk r legyen véges szám, tehát a (2.1) differenciálegyenlet végesen retardált. Az irodalomban leggyakrabban használt mértékek a stabilitás és aszimptotikus stabilitás vizsgálatánál funkcionál-differenciálegyenletekre a $h_0(t, \phi) = \|\phi\|$ és a $h(t, \phi) = |\phi(0)|$. A stabilitás ezen mértékekkel Ljapunov definiálta először, ezért ezt Ljapunov-féle stabilitásnak is nevezik. Ha nem írjuk ki a mértékeket, akkor ezekre a mértékekre gondolunk.

3. Alaptételek és a problémák felvetése

Két olyan ismert tételt mutatunk végesen retardált differenciálegyenletek stabilitására, amely Ljapunov-funkcionált használ. Ezek a tételek megtalálhatók bizonyítással együtt például Hatvani cikkében [**7**, 4.1 Tétel] és Hale könyvében [**6**, 5.2.1 Tétel].

A Tétel. Tegyük fel, hogy minden $M > 0$-ra létezik $L(M) > 0$ úgy, hogy

$$[t \in \mathbf{R}, \phi \in \mathcal{C}^r_M := \{\phi \in \mathcal{C}^r : \|\phi\| \le M\}] \Rightarrow |f(t,\phi)| \le L(M). \tag{3.1}$$

Ha létezik $M > 0$, egy $V : \mathbf{R}\times\mathcal{C}^r \to \mathbf{R}$ folytonos funkcionál, és $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{K}$ függvények úgy, hogy

$$W_1(|\phi(0)|) \le V(t,\phi) \le W_2(\|\phi\|), \tag{3.2}$$

$$\dot V_{(2.1)}(t,\phi) \le -W_3(|||\phi|||) \tag{3.3}$$

minden $t \in \mathbf{R}, \phi \in \mathcal{C}^r_M$-re, akkor az (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

B Tétel. Tegyük fel, hogy az A tétel (3.1), (3.2) feltételei teljesülnek, és

$$\dot V_{(2.1)}(t,\phi) \le -W_3(|\phi(0)|). \tag{3.4}$$

Ekkor a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

Az a bevezetőben beharangozott korlátossági feltétel f-re most már pontosan ki van mondva, ez a (3.1)-es feltétel. Régi probléma (ld. Burton könyvében [**1**, p. 252]), hogy ez a feltétel elhagyható-e az A és B tételekből. Ki fogjuk mondani a 4. fejezetben az A és B tételek általánosabb alakját. A bizonyításokból ki fog derülni, hogy a (3.3) ill. a (3.4) feltételeket tulajdonképpen csak olyan ϕ-kre követeljük meg, amelyek megoldásokból származnak, vagyis ha valamely t, t_0, ψ-re $\phi = x(t; t_0, \psi)$. Bebizonyítjuk ellenpéldákkal, hogy ha a tételeket úgy mondjuk ki, hogy csak az ilyen "megoldások menti" ϕ-kre követeljük meg ezeket a feltételeket, akkor a korlátossági feltételt elhagyva az aszimptotikus stabilitás nem következik. Ezzel foglalkozik az 5. fejezet.

A másik probléma, amivel foglalkozunk, hogy a korlátossági feltétel nélkül milyen tételek mondhatók ki végtelen retardálású egyenletekre. Ezt azért fontos megvizsgálni, mert a korlátossági feltétel az adott differenciálegyenletre lehetséges, hogy nem teljesül. Véges retardálású differenciálegyenletekre vannak ilyen tételek, amelyeket Burton könyvében [**1**, 8.3.1 Tétel] illetve Burton és Hatvani cikkében [**2**] lehet megtalálni szintén bizonyítással együtt.

C Tétel. Ha létezik $M > 0$, egy $V : \mathbf{R} \times \mathcal{C}^r \to \mathbf{R}$ funkcionál, és $W_1, W_2, W_3, W_4 \in \mathcal{K}$ függvények úgy, hogy

$$W_1(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq W_2(|||\phi|||) + W_3(|\phi(0)|), \tag{3.5}$$

$$\dot{V}_{(2.1)}(t, \phi) \leq -W_4(|||\phi|||) \tag{3.6}$$

minden $t \in \mathbf{R}, \phi \in \mathcal{C}^r_M$-re, akkor az (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

D Tétel. Ha az C tétel (3.5) feltétel teljesül, és

$$\dot{V}_{(2.1)}(t, \phi) \leq -W_4(|\phi(0)|) \tag{3.7}$$

minden $t \in \mathbf{R}, \phi \in \mathcal{C}^r_M$-re, akkor az (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

A C és D tételeket nem teljesen általánosan mondtuk ki. Vannak olyan továbbfejlesztések, amelyekben a (3.6)-ban ill. (3.7)-ben a W_4 előtt még egy $\eta(t)$ függvényt is megengednek bizonyos az η-ra tett feltételek mellett. Az ilyen módon általánosított tételek megtalálhatók Burton és Hatvani cikkében [**2**]. Meg fogjuk vizsgálni a 6., 7. és 8. fejezetben, milyen mértékekkel lehet helyettesíteni a C és D tételekben szereplő normákat, illetve az általánosításoknál az η-ra milyen feltételeket lehet tenni.

4. Az A és B tételek általánosítása

Először is bebizonyítunk egy állítást, amelyet felhasználva az A tétel könnyen belátható.

4.1. Segédtétel. A h_0, h mértékek legyenek adottak. Tegyük fel, hogy van olyan $V : \mathbf{R} \times \mathcal{C}^r \to \mathbf{R}$ folytonos funkcionál, h_1 mérték és $W_1, W_2, W_3, W_4 \in \mathcal{K}$ függvények, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

(i) $W_1(h(t,\phi)) \le V(t,\phi) \le W_2(h_0(t,\phi))$

(ii) $\dot{V}(t,\phi) \le -W_3(h_1(t,\phi))$

(iii) $W_4(h_0(t,\phi)) \le h_1(t,\phi)$

minden $t \in \mathbf{R}, \phi \in \mathcal{C}^r$-re. Ekkor a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan (h_0, h)-stabilis.

Biz: Először az egyenletes stabilitást bizonyítjuk. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $\delta := W_2^{-1}(W_1(\varepsilon))$. Ekkor, ha $h_0(t_0,\psi) < \delta$, akkor $V(t_0,\psi) \le W_2(\delta) = W_1(\varepsilon)$ az (i) szerint. A (ii) feltétel és a V folytonossága biztosítja, hogy V monoton nem növekvő t-ben a megoldás mentén, így

$$W_1(h(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi))) \le V(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi)) \le V(t_0,\psi) \le W_1(\varepsilon),$$

következésképpen $h(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi)) \le \varepsilon$, amit igazolni kellett az egyenletes (h_0,h)-stabilitáshoz.

A feltételek biztosítják, hogy

$$\begin{aligned}\dot{V}(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi)) &\le -W_3(h_1(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi)))\\ &\le -W_3(W_4(h_0(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi))))\\ &\le -W_3(W_4(W_2^{-1}(V(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi))))),\end{aligned}$$

ami differenciálegyenlőtlenség $V(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi))$-re. A Lakshmikantham, Leela, Martynyuk könyv [**8**, 3.1.1 tétel] szerint kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} V(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi)) = 0$$

egyenletesen t_0-ban. Az (i) feltételből így következik az egyenletes aszimptotikus stabilitás, és készen vagyunk a bizonyítással.

Megjegyezzük, hogy a (ii) és (iii) feltételek helyettesíthetőek lennének a $\dot{V}(t,\phi) \leq -W_5(h_0(t,\phi))$ egyenlőtlenséggel egy megfelelő $W_5 \in \mathcal{K}$-ra. Hogy mégis külön vettük ezeket annak az az oka, hogy a (iii) feltétel az, amelyik a (3.1) korlátossági feltételnek felel meg az A tételben.

Gyengítjük a segédtétel feltételeit, hogy megfogalmazhassuk egyenletesség nékül az A tételt, mint következményt, és azután ellenpéldát adhassunk a következménytételre, ha a korlátossági feltételt nem kötjük ki.

A bizonyításból látható, hogy a (ii) és (iii) feltételeket csak megoldások mentén kell megkövetelni. Sőt feltehetjük azt is, hogy a (iii) feltételben csak olyan megoldások szerepeljenek, amelyekre $h(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\psi)) \leq B$ minden $t \geq 0$-ra, ahol B egy t_0,ψ-től független konstans, hiszen a megoldások egyenletes stabilitásának bizonyításához ez a (iii) feltétel nem szükséges, így amikor a feltételt használjuk, akkor már a megoldás h-ban való korlátosságát beláttuk. A (ii) és (iii) feltételek tovább gyengíthetőek, ha csak (nem egyenletes) aszimptotikus stabilitást akarunk bizonyítani.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a megoldások *h_0-folytonosan függnek a kezdeti függvénytől*, ha minden $\varepsilon > 0, t_0 \in \mathbf{R}, t_1 \in \mathbf{R}_+$ és $\phi \in \mathcal{C}^r$-re létezik $\delta(t_0,t_1,\varepsilon,\phi) > 0$ úgy, hogy $h_0(t_0,\psi-\phi) < \delta$-ból következik, hogy $h_0(t_0+t_1, x_{t_0+t_1}(\cdot;t_0,\psi) - x_{t_0+t_1}(\cdot;t_0,\phi)) < \varepsilon$.

Ez a tulajdonság felel meg a kezdeti értéktől való folytonos függésnek a közönséges differenciálegyenletek esetében, amit, mint láttuk, amúgy is fel kell tennünk. Ha tehát a megoldások h_0-folytonosan függnek a kezdeti függvénytől, akkor a (ii) és (iii) feltételeket elég csak nagy t-kre megkövetelni. Ezek a módosítások a következő tételhez vezetnek.

4.2. Tétel. A h_0, h mértékek legyenek adottak és feltételezzük, hogy a megoldások h_0-folytonosan függnek a kezdeti függvénytől. Tegyük fel, hogy van olyan $V: \mathbf{R}\times\mathcal{C}^r \to \mathbf{R}$ folytonos funkcionál, h_1 mérték, $W_1, W_2, W_3, W_4 \in \mathcal{K}$ függvények és $T, B > 0$ konstansok, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

(i) $W_1(h(t,\phi)) \leq V(t,\phi) \leq W_2(h_0(t,\phi))$ minden $t \in \mathbf{R}, \phi \in \mathcal{C}^r$-re,

(ii) $\dot{V}(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\phi)) \leq -W_3(h_1(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\phi)))$ minden $t \geq T, \phi \in \mathcal{C}^r$-re és

(iii) $h_0(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\phi)) \leq W_4(h_1(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot;t_0,\phi)))$ minden $t \geq T, \phi \in \mathcal{C}^r$-re úgy, hogy $h(t_0+s, x_{t_0+s}(\cdot;t_0,\phi)) < B$ minden $s \geq T$-re.

Ekkor a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása aszimptotikusan (h_0, h)-stabilis.

4.3. Következmény. Tegyük fel, hogy az A tétel (3.1), (3.2) feltételei teljesülnek, és létezik olyan $T > 0$ úgy, hogy a

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -W_3(|||x_t|||) \tag{3.3'}$$

egyenlőtlenség is teljesül $t \geq t_0 + T$-re és minden $x : [t_0 - r, \infty) \to \mathbf{R}^n$ megoldására a (2.1) differenciálegyenletnek. Ekkor az egyenlet $x = 0$ megoldása aszimptotikusan stabilis.

Biz: Legyen $h_0(t, \phi) = \|\phi\|, h(t, \phi) = |\phi(0)|$ és $h_1(t, \phi) = |||\phi|||$ a 4.2. tételben. Ekkor elegendő belátni, hogy a tétel (iii) feltétele következik a korlátossági feltételből. Az (i),(ii) egyenlőtlenségek biztosítják a stabilitást, ezért feltehetjük, hogy a megoldások korlátosak felülről a h mérték szerint egy B konstanssal. Tegyük fel, hogy $T > r$. A korlátossági feltételből (ld. (3.1)) tudjuk, hogy a megoldások deriváltjainak abszolút értéke kisebb vagy egyenlő, mint $L(B)$. Minden $t \geq t_0$-ra létezik $t_1 \in [t - r, t]$, hogy $|x(t_1)| = \|x_t\|$. Vagyis, ha $t \geq t_0 + r$, akkor az $s \in [t_1 - \|x_t\|/2L(B), t_1 + \|x_t\|/2L(B)]$-ből következik, hogy $|x(s)| \geq \|x_t\|/2$, így kapjuk a

$$|||x_t||| \geq \sqrt{\frac{\|x_t\|^3}{8L(B)}}$$

egyenlőtlenséget. Ez pedig pontosan a (iii) feltétel a 4.2. tételben, vagyis a bizonyítás teljes.

A B tétel nem vezethető le a 4.2. tételből, mert nem tudjuk a $|\phi(0)|$ mértéket $\|\phi\|$-val alulról becsülni. Ezért kénytelenek vagyunk a (iii) egyenlőtlenséget egy általánosabb feltétellel helyettesíteni.

4.4. Tétel. Tegyük fel, hogy a 4.2. tétel feltételei a (iii) kivételével teljesülnek. Tegyük fel továbbá, hogy ha $x(\cdot; t_0, \psi)$ megoldása (2.1)-nek és $W_2(h_0(t_0 + t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0, \psi))) > \varepsilon > 0$ minden $t \geq T$-re, akkor

$$\int_T^\infty W_3(h_1(t_0 + t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0, \psi)))\mathrm{d}t = \infty.$$

Ekkor a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása aszimptotikusan (h_0, h)-stabilis.

Biz: A megoldások h_0-folytonosan függnek a kezdeti függvénytől, így bármely $\alpha > 0$-ra létezik $\delta(t_0, \phi, T, \alpha) > 0$, hogy a $h_0(t_0, \phi) < \delta$ feltételből következik, hogy $h_0(t_0 + T, x_{t_0+T}(\cdot; t_0\phi)) \leq \alpha$. Ugyanúgy, mint a 4.1. segédtételben, van olyan $\alpha(t_0, \phi, T, \varepsilon) > 0$, hogy $h(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0, \phi)) < \varepsilon$ minden $t \geq T$-re, ha $h_0(t_0+T, x_{t_0+T}(\cdot; t_0 \phi)) < \alpha$. Ez bizonyítja a megoldások stabilitását.

Elegendő mostmár csak azt belátni, hogy

$$\lim_{t\to\infty} V(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0, \phi)) := v_0 = 0.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy $v_0 > 0$. Ekkor $v_0 \leq W_2(h_0(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0 \phi)))$ minden $t \geq T$-re, vagyis az új feltétel azt adja, hogy

$$\int_T^\infty W_3(h_1(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0, \psi)))\mathrm{d}t = \infty.$$

A (ii) feltételből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0 \phi)) \\ &\leq V(t_0+T, x_{t_0+T}(\cdot; t_0 \phi)) - \int_T^t W_3(h_1(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0, \psi)))\mathrm{d}t \to -\infty \end{aligned}$$

$(t \to \infty)$, ami ellentmondás, és a tételt beláttuk.

4.5. Következmény. Tegyük fel, hogy az A tétel $(3.1), (3.2)$ feltételei teljesülnek, és létezik olyan $T > 0$ úgy, hogy a

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -W_3(|x(t; t_0, \phi)|) \tag{3.4'}$$

egyenlőtlenség is teljesül $t \geq t_0 + T$-re és minden $x : [t_0 - r, \infty) \to \mathbf{R}^n$ megoldására a (2.1) differenciálegyenletnek. Ekkor az egyenlet $x = 0$ megoldása aszimptotikusan stabilis.

Biz: Legyen $h_0(t, \phi) = \|\phi\|$ és $h(t, \phi) = h_1(t, \phi) = |\phi(0)|$ a 4.4. tételben. Ekkor a korlátossági feltétel segítségével belátjuk a tétel (iii) feltételét. Ahogy már láttuk a 4.3. következményben, minden $t \geq t_0 + r$-re létezik egy $t_1 \in [t - r, t]$, hogy $s \in [t_1 - \|x_t\|/2L(B), t_1 + \|x_t\|/2L(B)]$-ből következik, hogy $|x(s)| \geq \|x_t\|/2$, így (egymástól legalább $r + 1/L(B)$ távolságra lévő végtelen sok t-t véve) kapjuk a kívánt

$$\int_T^\infty W_3(h_1(t_0+t, x_{t_0+t}(\cdot; t_0, \psi)))\mathrm{d}t = \infty$$

feltételt.

Mint láttuk a bizonyításokból, mindkét tételben ugyanaz az ötlet: feltesszük, hogy a megoldás nem tart 0-hoz, ebből az (i) feltétel segítségével könnyen következik a Ljapunov-funkcionál nem 0-hoz tartása. A Ljapunov-funkcionál viszont monoton nem növekvő, így egy pozitív konstans fölött marad. Ezt felhasználva és ismét a (i) feltétellel a h_0 mérték is pozitív konstans fölött marad, amiből a $\dot{V}$-t felülről becslő mértéket is valamilyen szempont szerint nagynak találjuk. A bizonyításban tulajdonképpen ez az egyetlen nehezebb rész, hogy hogyan bizonyítjuk, és milyen szempont szerint ezen mérték nagy voltát. Ezek után ellentmondásra jutunk azáltal, hogy a V nemnegatív, de behelyettesítve a megoldást a differenciálhányadosa olyannyira negatív, hogy V-nek $-\infty$-hez kellene tartania. Jól jegyezzük meg ezt a módszert, mert végtelen retardálásra pontosan ugyanez az ötlet, csak a technikai részletek túl bonyolultak ahhoz, hogy az ember kihámozhassa az ötletet belőle.

5. Ellenpéldák

A következő két példa bizonyítja, hogy a korlátossági feltétel nem hagyható el a 4.3. és 4.5. következményből.

Tekintsük az

$$\dot{x} = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}x, \qquad (x \in \mathbf{R}) \tag{5.1}$$

közönséges differenciálegyenletet, ahol $\lambda : [-1, \infty) \to (0, \infty)$ folytonosan differenciálható függvény ($r = -1, t_0 = 0$). Világos módon az (5.1) differenciálegyenlet összes megoldására teljesül az $x(t; 0, \phi) = c\lambda(t)$ minden $t \geq 0$-ra, ahol $c = \phi(0)/\lambda(0)$ konstans. Mindkét példában a $V(t, \phi) = \|\phi\| + |||\phi|||$ Ljapunov-funkcionált fogjuk használni. Meg kell tehát konstruálnunk egy olyan λ függvényt, amelyre

$$\dot{V}(t, c\lambda_t) \leq -W_3(|||c\lambda_t|||) \qquad (4.3.\ \text{köv.}) \tag{5.2}$$

illetve

$$\dot{V}(t, c\lambda_t) \leq -W_3(|c\lambda(t)|) \qquad (4.5.\ \text{köv.}) \tag{5.3}$$

teljesül minden $t \geq 1, c \in \mathbf{R}$-re és eközben $\lambda(t) \not\to 0$ mialatt $t \to \infty$.

Legyen a λ függvény olyan, hogy

(a) $\lambda(n) = 1 + 1/2^n$,

(b) $\lambda(t-1) - \lambda(t) \geq 1/2^{n+1}$, és

(c) $|||\lambda_t||| \leq 1/2^{n-1}$

minden $t \in [n, n+1)$-re, ahol $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$. Ilyen tulajdonságokkal rendelkező függvényt egyenes- és paraboladarabokból is lehet konstruálni.

A (b) feltétel biztosítja, hogy a $\|\lambda_t\|$ monoton nem növekvő, vagyis a (b)-t és a (c)-t felhasználva

$$\dot{V}(t, c\lambda_t) \leq |||c\lambda_t|||^{\cdot} \leq |c|W(\frac{1}{2^n}) \leq -W_3(|||c\lambda_t|||)$$

teljesül minden $t \in [n, n+1), c \in \mathbf{R}$-re. Ezzel beláttuk az (5.2) egyenlőtlenséget, de az (a) feltétel miatt $\lambda(t) \not\to 0$, ha $t \to \infty$, így az (5.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása nem aszimptotikusan stabilis.

Most megkonstruáljuk azt a λ függvényt, amely az (5.3)-t teljesíti. Legyen adott egy $\{[a_n, b_n]\}_{n=0}^{\infty}$ intervallumsorozat úgy, hogy $[a_{n+1}-1, b_{n+1}-1] \subset [a_n, b_n]$ és $a_0 = 0, b_0 = 1/4$. Legyen λ olyan függvény, amelyre igazak a következő feltevések:

(a) $\lambda(t) = 1/2^n$, ha $t \in [b_n, a_{n+1}]$,

(b) $\lambda(t-1) - \lambda(t) \geq 1/2^{n+1}$, ha $t \in [a_n, a_{n+1}]$,

(c) $\dot{\lambda}(t) \leq -1$ és $\lambda(t) \geq 1 + 1/2^{n+2}$, ha $t \in [a_{n+1} - 1, b_{n+1} - 1]$,

(d) $\lambda(t)$ monoton csökkenő a $[b_{n+1} - 1, b_n]$ intervallumon,

(e) $\max \{\lambda(t) : t \in [a_n, a_{n+1} - 1]\} = 1 + 1/2^n$ és

(f) $\lambda(t) \leq 4$, ha $t \geq -1$.

Mivel $\|\lambda_t\|$ nemnövekvő, az (a) és (b) feltételekből

$$\dot{V}(t, c\lambda_t) \leq |c| \cdot |||\lambda_t|||^{\cdot} \leq -|c| W(\frac{1}{2^n}) \leq -W_3(|c\lambda(t)|)$$

minden $t \in [b_n, a_{n+1}], c \in \mathbf{R}$-re, és megfelelő $W, W_3 \in \mathcal{K}$ függvényekre.

Ha $t \in [a_n, b_n]$, akkor

$$\dot{V}(t, c\lambda_t) \leq |c| \cdot \|\lambda_t\|^{\cdot} \leq -|c| \leq -|c|\frac{\lambda(t)}{4} = -\frac{1}{4}|c\lambda(t)|.$$

Következésképpen az (5.3) egyenlőtlenség teljesül minden $t \geq 0$-ra. Másrészt az (e) feltétel miatt $\lambda(t) \not\to 0$, ha $t \to \infty$, így az (5.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása nem aszimptotikusan stabilis.

6. Végtelen retardálású differenciálegyenletek

Az eddigiekben láttuk, hogy bizonyos meglevő tételekből a korlátossági feltétel nem hagyható el. Ez a feltétel viszont, ahogy már a bevezetőben is említettük, egy differenciálegyenletre vagy teljesül, vagy nem. Vagyis nagy jelentősége van az olyan tételeknek, amelyek a korlátossági feltétel nélkül tudnak aszimptotikus stabilitást állítani. Ilyen tételek véges retardálás esetén a C és D tételek. A bizonyításokkal itt nem foglalkozunk, később végtelen retardálásra bizonyítunk hasonló tételeket, amelyekből ezek is következnek.

Hogy végtelen retardálású differenciálegyenletekre is kimondhassuk a tételeket, ahhoz először is meg kell vizsgálnunk, hogy a normáknak mi felel meg ebben az esetben. Nyilván a $|\phi(0)|$-kel nincs semmilyen gond, de a $|||\phi|||$-val igen, hiszen nem feltétlenül lehet integrálni a ϕ-t a $(-\infty, 0]$ intervallumon. Ezért egy súlyfüggvényt szoktak használni, amely integrálható, így ha a ϕ korlátos, akkor már a súlyfüggvénnyel súlyozott ϕ is integrálható lesz.

Definíció. Legyen tehát $\|\phi\|_g^k := \int_{-\infty}^0 g(s)k(|\phi(s)|)ds$, ahol $\phi \in \mathcal{C}_M^\infty$, $k : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $g : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ és $\int_{-\infty}^0 g(s)ds < \infty$.

Ez nagyon általános definíció, nem fogjuk használni ennyire általánosan. Kimondunk egy olyan ekvivalencia-tulajdonságot, amely csoportosítja ezeket a mértékeket. Az egy csoportban levő mértékeknek meg lesz az a jó tulajdonságuk, hogy a Ljapunov-funkcionált használó tételekben egyszerűen egymás helyébe helyettesíthetőek, így magát a tételt csak a csoportbeli egyik mértékre kimondva rögtön a csoportbeli többi mértékre kimondható tételekre is beláttuk.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a h_1 *és* h_2 *mértékek ekvivalensek*, jelölésben $h_1 \equiv h_2$, ha létezik $M > 0$ és $W_1, W_2 \in \mathcal{K}$ úgy, hogy $W_1(h_1(t,\phi)) \leq h_2(t,\phi) \leq W_2(h_1(t,\phi))$ minden $t \in \mathbf{R}, \phi \in \mathcal{C}_M^\infty$-re.

A tételekben egymás helyébe helyettesíthetőség ilyen esetben nyilvánvaló, hiszen csak egy újabb W függvény íródik hozzá a tételhez a másik mértéknél. Most bebizonyítunk két olyan állítást, amely ilyen ekvivalenciát bizonyít, és ezalapján leszűkítjük azon mértékek körét, amelyeket felhasználunk a tételeinkben.

6.1. Segédtétel. Legyenek $k_1, k_2 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ és $g_1, g_2 : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ adottak és tegyük fel, hogy léteznek $W_1, W_2, W_3, W_4 \in \mathcal{K}$ függvények úgy, hogy $W_1(k_1(s)) \le k_2(s) \le W_2(k_1(s))$ és $W_3(g_1(s)) \le g_2(s) \le W_4(g_1(s))$. Ha létezik $K > 0$, hogy $g_1(s), g_2(s) \le K$, és ha minden $M > 0$-hoz létezik $H(M) > 0$, hogy $k_1(s), k_2(s) \le H(M)$ minden $s \in [0, M]$-re, akkor $\|\cdot\|_{g_1}^{k_1} \equiv \|\cdot\|_{g_2}^{k_2}$.

Biz: Legyen $M > 0$ adott, $H = H(M)$, $\phi \in \mathcal{C}_M^\infty$ és $\varepsilon = \|\phi\|_{g_2}^{k_2}$. Ha $\varepsilon = 0$, akkor $\|\phi\|_{g_1}^{k_1} \ge W(\|\phi\|_{g_2}^{k_2})$ minden $W \in \mathcal{K}$-ra, így feltehetjük, hogy $\varepsilon > 0$. Legyen $S = S(\varepsilon, M, g_2) > 0$ olyan ε-ban monoton növekvő függvény, hogy $\int_{-\infty}^{-S} g_2(s)ds \le \varepsilon/3H$. Ekkor $\int_{-\infty}^{0} g_2(s)k_2(|\phi(s)|)ds = \int_{-\infty}^{-S} + \int_{-S}^{0} \le \int_{-\infty}^{-S} g_2(s)Hds + \int_{-S}^{0} \le \varepsilon/3 + \int_{-S}^{0}$, amiből $2\varepsilon/3 \le \int_{-S}^{0} g_2(s)k_2(|\phi(s)|)ds$. Legyen $u = \varepsilon/3S$, $Q_u = \{s \in [-S, 0] : g_2(s)k_2(|\phi(s)|) \ge u\}$ és $Q_u^c = [-S, 0]\backslash Q_u$. Ekkor $2\varepsilon/3 \le \int_{-S}^{0} g_2(s)k_2(|\phi(s)|)ds = \int_{Q_u} + \int_{Q_u^c} \le \mu(Q_u)HK + \mu(Q_u^c)u = \mu(Q_u)(HK - u) + Su$, vagyis $\mu(Q_u) \ge (2\varepsilon/3 - Su)/(HK - u) \ge \varepsilon/3HK$. Ezen kívül, ha $s \in Q_u$, akkor $k_2(|\phi(s)|) \ge u/g_2(s) \ge u/K$ és $g_2(s) \ge u/k_2(|\phi(s)|) \ge u/H$. Következésképpen

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{g_1}^{k_1} &\ge \int_{Q_u} g_1(s)k_1(|\phi(s)|)ds \ge \int_{Q_u} W_4^{-1}(g_2(s))W_2^{-1}(k_2(|\phi(s)|))ds \\ &\ge W_4^{-1}(u/H)W_2^{-1}(u/K)\mu(Q_u) \ge W_4^{-1}(\varepsilon/3SH)W_2^{-1}(\varepsilon/3SK)\varepsilon/3HK =: W(\varepsilon)\end{aligned}$$

és az egyik irányt beláttuk. A másik irányú egyenlőtlenség hasonlóan kapható felhasználva a feltett másik irányú becslést.

Ezalapján tehát a továbbiakban legyen $k(s) = s$, hiszen úgy sincs nagy jelentősége az olyan mértékeknek, amelyekben a mérték túl gyengén vagy túl erősen függ a $|\phi(s)|$-től. A g-re csak az egyszerűség kedvéért tesszük fel az $\int_{-\infty}^{0} g(s)ds = 1$ feltételt. Ezentúl legyen $\|\phi\|_g = \|\phi\|_g^k$, ahol $k(s) = s$ minden $s \ge 0$-ra és $\int_{-\infty}^{0} g(s)ds = 1$.

6.2. Segédtétel. Az $|x(t)| + \|x_t\|_g$ és a $W_1(|x(t)|) + W_2(\|x_t\|_g)$ mértékek ekvivalensek.

Biz: Be kell látnunk a két egyenlőtlenséget. Egyrészt $W_1(|x(t)|) + W_2(\|x_t\|_g) \le W(|x(t)|) + W(\|x_t\|_g) \le 2W(|x(t)| + \|x_t\|_g)$, ahol $W(s) = \max\{W_1(s), W_2(s)\}$. Másrészt $W_1(|x(t)|) + W_2(\|x_t\|_g) \ge W(|x(t)|) + W(\|x_t\|_g) \ge W((|x(t)| + \|x_t\|_g)/2)$, ahol $W(s) = \min\{W_1(s), W_2(s)\}$ és a bizonyítás kész.

Ez utóbbi szerint a tételekben a $W_1(|x(t)|) + W_2(\|x_t\|_g)$ mérték helyett használható a $|x(t)| + \|x_t\|_g$, amit meg is teszek, mert egyszerűsíti a bizonyítást.

A C és a D tétel illusztrálására egy közös példát mutatunk, amelyikből kitűnik, hogy szükség van olyan tételre, amelyben a $\dot{V}$ felső becslésében az η is előfordul. Tekintsük a következő végtelen retardálású differenciálegyenletet:

$$\dot{x}(t) = -a(t)f(x(t)) + b(t)\int_{-\infty}^{0} e^{\beta s} g(x(t+s))ds, \tag{6.1}$$

ahol β pozitív valós szám. Definiáljuk a

$$\begin{aligned} V(t,x_t) =& |x(t)| + \alpha \int_{-\infty}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{\beta(u-t)}|b(u-s)||g(x(u))|duds = \\ & |x(t)| + \alpha\int_{t}^{\infty}|b(v)|dv\int_{-\infty}^{0} e^{\beta u}|g(x(t+u))|du \end{aligned}$$

Ljapunov-funkcionált, ahol $\alpha \geq 0$ valós szám. Hogy később felhasználhassuk, bebizonyítunk néhány egyenlőtlenséget. Először is nyilvánvaló, hogy $|x(t)| \leq V(t,x_t)$. Tegyük fel, hogy $\int_{-\infty}^{\infty}|b(v)|dv =: B < \infty$. Ha $|g(x)| \leq W_1(|x|)$ valamely $W_1 \in \mathcal{K}$ függvényre, akkor a 6.1. segédtétel szerint kapunk egy $W_2 \in \mathcal{K}$ függvényt, hogy

$$\begin{aligned} V(t,x_t) \leq& |x(t)| + \alpha B\int_{-\infty}^{0} e^{\beta s}|g(x(t+s))|ds \leq \\ & |x(t)| + \alpha B W_2\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\beta s}|x(t+s)|ds\right) \\ & \leq |x(t)| + \alpha B W_2\left(\frac{1}{\beta}\|x_t\|_h\right), \end{aligned}$$

ahol $h(s) = \beta e^{\beta s}$, így $\int_{-\infty}^{0} h(s)ds = 1$. Itt nyilván felhasználható a 6.2. segédtétel, amivel kapjuk a

$$V(t,x_t) \leq W_3(|x(t)| + \|x_t\|_h)$$

felső becslést, ahol $W_3 \in \mathcal{K}$.

Számoljuk ki most a funkcionál (6.1) differenciálegyenlet szerinti deriváltját.

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(6.1)}(t,x_t) =& -a(t)|f(x(t))| + |b(t)|\int_{-\infty}^{0} e^{\beta s}|g(x(t+s))|ds + \\ & \alpha\int_{-\infty}^{0}|b(t-s)||g(x(t))| - e^{\beta s}|b(t)||g(x(t+s))|ds - \\ & \alpha\beta\int_{-\infty}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{\beta(u-t)}|b(u-s)||g(x(u))|duds = \\ & -a(t)|f(x(t))| + \alpha|g(x(t))|\int_{t}^{\infty}|b(s)|ds - \\ & \left(\alpha\beta\int_{t}^{\infty}|b(s)|ds + (\alpha-1)|b(t)|\right)\int_{-\infty}^{t} e^{\beta(s-t)}|g(x(s))|ds \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $|g(x)| \leq c|f(x)|$, így a $\dot{V}$ tovább becsülhető.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{(6.1)}(t, x_t) \leq & -a(t)|f(x(t))| + c\alpha|f(x(t))| \int_t^\infty |b(s)|ds - \\
& \left(\alpha\beta \int_t^\infty |b(s)|ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right) \int_{-\infty}^t e^{\beta(s-t)}|g(x(s))|ds \\
= & -\left[a(t) - c\alpha \int_t^\infty |b(s)|ds\right] |f(x(t))| - \\
& \left(\alpha\beta \int_t^\infty |b(s)|ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right) \int_{-\infty}^t e^{\beta(s-t)}|g(x(s))|ds
\end{aligned}$$

Ezt a becslést fogjuk továbbvinni a C és D tételek általánosításakor.

7. A C tétel általánosítása

Szükségünk van három lemmára és egy segédtételre, hogy bebizonyíthassuk a C tételnek megfelelő végtelen retardálású differenciálegyenletekre vonatkozó tételt. Ezekben a lemmákban és segédtételben már megfigyelhető az az ötlet, amelyet a véges retardálású differenciálegyenleteknél hangsúlyoztunk. Az első kettő lemma csak technikai lemma, a harmadik biztosítja azt, hogy ha a $|x(t)| + \|x_t\|_g$ pozitív konstans fölött marad valamilyen x függvényre egy elegendően hosszú intervallumon, akkor az $\|x_{t''}\|_g$ is nagy lesz valamilyen t'' intervallumbeli elemre. Ezt a segédtétel egészíti ki azzal, hogy ha az $\|x_{t''}\|_g$ nagy, akkor a t'' egy kis környezetében is még nagy az $\|x_t\|_g$. Ez pedig elegendő ahhoz, hogy az ellentmondást kihozzuk.

7.1. Lemma. Tegyük fel, hogy $B \subseteq [-S, 0]$ Borel-mérhető halmaz, $\gamma > 0$ és $\mu(B) > 0$. Ekkor létezik $n > 0$, $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ diszjunkt intervallumsorozat B-ben, hogy $\mu(A \cap (\cup(a_i, b_i))) \geq \mu(A \cap B) - \gamma$ minden $A \subseteq [-S, 0]$ Lebesgue-mérhető halmazra.

Biz: A B Borel-mérhetőségéből következik, hogy létezik az az intervallumsorozat úgy, hogy $\mu(\cup(a_i, b_i)) \geq \mu(B) - \gamma$. Ekkor $\mu(A \cap B) = \mu(A \cap (B \backslash (\cup(a_i, b_i))) \cup (\cup(a_i, b_i)))) = \mu(A \cap (B \backslash (\cup(a_i, b_i)))) + \mu(A \cap (\cup(a_i, b_i))) \leq \mu(B \backslash (\cup(a_i, b_i))) + \mu(A \cap (\cup(a_i, b_i))) \leq \gamma + \mu(A \cap (\cup(a_i, b_i)))$ és a bizonyítás kész.

7.2. Lemma. Tegyük fel, hogy A Lebesgue-mérhető, $\delta \in \mathbf{R}$ és $(a, b) \subseteq [-S, 0]$. $A - \delta := \{x - \delta : x \in A\}$. Ekkor $\mu((A - \delta) \cap (a, b)) \geq \mu(A \cap (a, b)) - |\delta|$.

Biz: Tegyük fel, hogy $\delta \geq 0$, $\delta < 0$-ra a bizonyítás hasonló. Ekkor $\mu((A - \delta) \cap (a, b)) = \mu(A \cap (a + \delta, b + \delta)) \geq \mu(A \cap (a + \delta, b)) = \mu((A \cap (a, b)) \backslash (A \cap (a, a + \delta))) = \mu(A \cap (a, b)) - \mu(A \cap (a, a + \delta)) \geq \mu(A \cap (a, b)) - \delta$.

7.3. Segédtétel. Tegyük fel, hogy $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ Lebesgue-mérhető függvény, $|x(t)| \leq M$, $g : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ Borel-mérhető függvény és $g(s) \leq K$. Ekkor létezik olyan $W \in \mathcal{K}$ függvény, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, M, K, g) > 0$, hogy $\|x_{t_1}\|_g \geq \varepsilon$-ból következik, hogy $\|x_t\|_g \geq W(\varepsilon)$ minden $t \in (t_1 - \delta_0, t_1 + \delta_0)$-ra.

Biz: Legyen $\varepsilon \leq \|x_{t_1}\|_g$ és legyen $S = S(\varepsilon, M, g)$ olyan, hogy $\int_{-\infty}^{-S} g(s)ds \leq \varepsilon/3M$. Ekkor $\int_{-\infty}^{0} g(s)|x_{t_1}(s)|ds = \int_{-\infty}^{-S} + \int_{-S}^{0} \leq \int_{-\infty}^{-S} g(s)M ds + \int_{-S}^{0} \leq \varepsilon/3 + \int_{-S}^{0}$, amiből $2\varepsilon/3 \leq \int_{-S}^{0} g(s)|x_{t_1}(s)|ds$. Definiáljuk a következő konstansokat és halmazokat:

$$u := \varepsilon/3S \qquad Q_u := \{s \in [-S,0] : g(s)|x_{t_1}(s)| \geq u\},\ Q_u^c := [-S,0]\backslash Q_u,$$
$$v := u/2M \qquad R_v := \{s \in [-S,0] : g(s) > v\},$$
$$w := u/2K \qquad S_w(t) := \{s \in [-S,0] : |x_t(s)| > w\}.$$

Ekkor $2\varepsilon/3 \leq \int_{-S}^0 g(s)|x_{t_1}(s)|ds = \int_{Q_u} + \int_{Q_u^c} \leq \mu(Q_u)MK + \mu(Q_u^c)u$, amiből $\mu(Q_u) \geq (2\varepsilon/3 - Su)/(MK - u) \geq \varepsilon/3MK$. Sőt ugyanúgy, mint a 6.1. segédtételben, ha $s \in Q_u$, akkor $g(s) \geq u/M$ és $x_{t_1}(s) \geq u/K$, vagyis $s \in R_v$ és $s \in S_w(t_1)$, amiből $Q_u \subseteq R_v \cap S_w(t_1)$ és $\mu(R_v \cap S_w(t_1)) \geq \mu(Q_u) \geq \varepsilon/3MK$. A 7.1. lemmát $\gamma = \varepsilon/6MK$-val alkalmazva kapjuk az $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$ diszjunkt intervallumsorozatot R_v-ben úgy, hogy $\mu(S_w(t_1) \cap (\cup(a_i,b_i))) \geq \mu(S_w(t_1) \cap R_v) - \gamma \geq \varepsilon/6MK$. Legyen most $\delta_0 := \varepsilon/(12MKn)$ és $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Nyilvánvaló módon $\mu(S_w(t_1) \cap (\cup(a_i,b_i))) = \sum \mu(S_w(t_1) \cap (a_i,b_i))$, és $S_w(t_1) - \delta = \{s - \delta : s \in [-S,0], |x_{t_1}(s)| > w\} = \{s \in [-S-\delta, -\delta] : |x_{t_1}(s+\delta)| > w\} = \{s \in [-S-\delta,-\delta] : |x_{t_1+\delta}(s)| > w\}$, vagyis $(S_w(t_1) - \delta) \cap [-S,0] \subseteq S_w(t_1+\delta)$. A 7.2. lemmából és az $(a_i,b_i) \subseteq [-S,0]$-ból kapjuk, hogy $\mu((a_i,b_i) \cap S_w(t_1+\delta)) \geq \mu((a_i,b_i) \cap (S_w(t_1) - \delta) \cap [-S,0]) = \mu((a_i,b_i) \cap (S_w(t_1) - \delta)) \geq \mu((a_i,b_i) \cap S_w(t_1)) - |\delta| \geq \mu((a_i,b_i) \cap S_w(t_1)) - \delta_0$, tehát $\sum \mu((a_i,b_i) \cap S_w(t_1+\delta)) \geq \sum \mu((a_i,b_i) \cap S_w(t_1)) - n\delta_0 \geq \varepsilon/6MK - n\varepsilon/(12MKn) = \varepsilon/12MK$. Végülis, ha $t \in (t_1 - \delta_0, t_1 + \delta_0)$ $(t = t_1 + \delta)$, akkor $\|x_t\|_g \geq \int_{(\cup(a_i,b_i)) \cap S_w(t)} g(s)|x_t(s)|ds \geq \int_{(\cup(a_i,b_i)) \cap S_w(t)} vwds = vw\mu((\cup(a_i,b_i)) \cap S_w(t)) \geq vw\varepsilon/12MK = \varepsilon^3/(432M^2S^2K^2) =: W(\varepsilon)$ és a bizonyítás kész.

7.4. Lemma. Legyen $S_0 := \inf\{S \geq 0 : \int_{-S}^0 g(s)ds > 0\}$ és legyen $S > S_0$, $\nu_0 := \int_{-S}^0 g(s)ds > 0$. Ha valamilyen $t' \geq t_0 + S$ esetén $|x(t)| + \|x_t\|_g \geq \varepsilon$ minden $t \in [t' - S, t']$-re, akkor létezik olyan $t'' \in [t' - S, t']$, hogy $\|x_{t''}\|_g \geq \varepsilon\nu_0/(1+\nu_0)$.

Biz: Tegyük fel indirekt módon, hogy $\|x_t\|_g < \varepsilon\nu_0/(1+\nu_0)$ minden $t \in [t'-S, t']$-re. Ekkor a $|x(t)| + \|x_t\|_g \geq \varepsilon$ feltételből kapjuk, hogy $|x(t)| \geq \varepsilon/(1+\nu_0)$, így $\|x_{t'}\|_g \geq \int_{-S}^0 g(s)|x_{t'}(s)|ds = \int_{t'-S}^{t'} g(s-t')|x(s)|ds \geq \int_{t'-S}^{t'} g(s-t')\varepsilon/(1+\nu_0)ds = \varepsilon/(1+\nu_0)\int_{-S}^0 g(s)ds = \varepsilon\nu_0/(1+\nu_0)$, ami ellentmondás.

7.5. Tétel. Tegyük fel, hogy $g : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ korlátos, Borel-mérhető függvény, és hogy létezik olyan $V : \mathbf{R} \times \mathcal{C}^\infty \to \mathbf{R}$ folytonos funkcionál és $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{K}$ függvények úgy, hogy a; $W_1(|x(t)|) \le V(t, x_t) \le W_2(|x(t)| + \|x_t\|_g)$,

b; $\dot{V}(t, x_t) \le -W_3(\|x_t\|_g)$.

Ekkor a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

Biz: Először is belátjuk a megoldás egyenletes stabilitását. Ehhez azt kell bizonyítanunk, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $\|\phi\| = \sup\{|\phi(s)| : s \in (-\infty, 0]\} < \delta$, akkor $|x(t; t_0, \phi)| < \varepsilon$ minden $t \ge t_0$-ra. Legyen $\delta = W_2^{-1}(W_1(\varepsilon))/2$. Ekkor, mivel a $V(t, x_t(\cdot; t_0, \phi))$ függvény mint t függvénye monoton nem növekvő, ezért $|x(t; t_0, \phi)| \le W_1^{-1}(V(t, x_t(\cdot; t_0, \phi))) \le W_1^{-1}(V(t_0, x_{t_0}(\cdot; t_0, \phi)) \le W_1^{-1}(W_2(|x(t_0)| + \|x_{t_0}\|_g)) \le W_1^{-1}(W_2(2\|\phi\|)) < W_1^{-1}(W_2(2\delta)) = \varepsilon$ és ezzel beláttuk az egyenletes stabilitást.

Az egyenletes aszimptotikus stabilitáshoz tekintsük azt a $\gamma > 0$ számot, ami az $\varepsilon = 1$-hez tartozik az egyenletes stabilitás definíciójában, vagyis ha $\|\phi\| < \gamma$, akkor $|x(t; t_0, \phi)| < 1$ minden $t \ge t_0$-ra. Sőt $V(t_0, x_{t_0}) \le W_2(|x(t_0)| + \|x_{t_0}\|_g) \le W_2(2)$. Legyen S_0, S, ν_0 ugyanaz, mint a 7.4. lemmában. Találnunk kell most minden $\nu > 0$-hoz egy $T = T(\nu) > 0$ számot úgy, hogy $\|\phi\| < \gamma$-ból következzen az $|x(t; t_0, \phi)| < \nu$ minden $t \ge t_0 + T$-re. Legyen $\varepsilon = W_2^{-1}(W_1(\nu))$ és $W \in \mathcal{K}$ valamint δ_0, amit a 7.3. segédtétel biztosít $\varepsilon\nu_0/(1 + \nu_0)$-hoz. Legyen továbbá $N = [W_2(2)/(2\delta_0 W_3(W(\varepsilon\nu_0/(1 + \nu_0))) + 1]$ és $T = (S + 2\delta_0) * N$. Tegyük fel indirekt módon, hogy ez a T nem megfelelő, vagyis létezik $t' \ge t_0 + T$, hogy $|x(t')| \ge \nu$. Ekkor $t \in [t_0, t']$-re kapjuk, hogy $|x(t)| + \|x_t\|_g \ge W_2^{-1}(V(t, x_t)) \ge W_2^{-1}(V(t', x_{t'})) \ge W_2^{-1}(W_1(|x(t')|)) \ge W_2^{-1}(W_1(\nu)) = \varepsilon$. A 7.4. lemma szerint kapunk egy $t_i \in [t_0 + \delta_0(2i - 1) + (i-1)S, t_0 + \delta_0(2i-1) + iS]$ $i = 1, 2, ..., N$ számsorozatot úgy, hogy $\|x_{t_i}\|_g \ge \varepsilon\nu_0/(1+\nu_0)$. A 7.3. segédtételből kaptuk W-t és δ_0-t úgy, hogy $\|x_t\|_g \ge W(\varepsilon\nu_0/(1 + \nu_0))$ minden $t \in (t_i - \delta_0, t_i + \delta_0)$-ra, ahol $i = 1, 2, ..., N$. A $(t_i - \delta_0, t_i + \delta_0)$ intervallumok nyilvánvalóan diszjunktak, így $V(t_0 + T, x_{t_0+T}(\cdot; t_0, \phi)) \le V(t_0, x_{t_0}(\cdot; t_0, \phi)) + \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{V}(s, x_s(\cdot; t_0, \phi))ds \le W_2(2) - \sum \int_{t_i-\delta_0}^{t_i+\delta_0} W_3(\|x_s(\cdot; t_0, \phi)\|_g)ds \le W_2(2) - \sum \int_{t_i-\delta_0}^{t_i+\delta_0} W_3(W(\varepsilon\nu_0/(1 + \nu_0)))ds = W_2(2) - 2N\delta_0 W_3(W(\varepsilon\nu_0/(1 + \nu_0))) < 0$, ami ellentmondáshoz vezet, vagyis a bizonyítás teljes.

Ez a tétel felel meg a C tételnek a végtelen retardálású esetben. Nem hozunk rá példát, mert elég nehéz a $\dot{V}$-re tett feltételt ilyen alakjában kielégíteni. Nézzük meg inkább azt az általánosítási lehetőséget, miszerint a W_3 elé egy η függvény írható bizonyos esetekben. A bizonyításból kideríthető milyen η-k jöhetnek szóba. Nyilván csak olyanokat vehetünk figyelembe, amelyek nem rontják le az $\|x_t\|_g$ nagy voltát a $(t_i - \delta_0, t_i + \delta_0)$ intervallumokon. Ezt a tulajdonságot egyenletes gyenge integrális pozitivitásnak nevezzük, és a következőképpen definiáljuk.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ függvény *egyenletesen gyengén integrálisan pozitív a δ, S paraméterekkel* (jelben UWIP(δ, S)), ha minden $M > 0$-ra létezik $Q_M > 0$ úgy, hogy ha $Q \geq Q_M$ és t_i $(i = 1, 2, ...)$ kielégíti a $t_i + \delta < t_{i+1} - \delta < t_i + \delta + S$ feltételt és $I = \cup(t_i - \delta, t_i + \delta)$, akkor $\sum \int_{I\cap[t_1-\delta, t_1-\delta+Q]} \eta(s)ds > M$.

Rémesnek néz ki ez a tulajdonság pedig egyszerű dologról van szó: a bizonyításban az $\|x_t\|_g$ konstans fölött marad a $(t_i - \delta_0, t_i + \delta_0)$ intervallumokon, az η belekerül az integrálba, de ha az η UWIP$(\delta_0, 2S)$ $(S > S_0$, az S_0 a 7.4. lemmában), akkor ez biztosítja, hogy az integrál továbbra is $-\infty$-hez tart méghozzá t_0-ban egyenletesen. δ_0 viszont a bizonyításban tetszőlegesen kicsi lehet, így kénytelenek vagyunk megkövetelni az η egyenletes gyenge integrális pozitivitását minden δ-ra. Igy a következő tételhez jutunk.

7.6. Tétel. Tegyük fel, hogy $g : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ korlátos és Borel-mérhető függvény, $\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ UWIP$(\delta, 2S)$ minden $\delta > 0$-ra, és hogy létezik olyan $V : \mathbf{R} \times \mathcal{C}^\infty \to \mathbf{R}$ folytonos funkcionál és $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{K}$ függvények úgy, hogy

a; $W_1(|x(t)|) \leq V(t, x_t) \leq W_2(|x(t)| + \|x_t\|_g)$,

b; $\dot{V}(t, x_t) \leq -\eta(t)W_3(\|x_t\|_g)$.

Ekkor a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

Nagyon erős az η-ra tett feltétel, főleg az, hogy a egyenletes gyenge integrális pozitivitást minden δ-ra megköveteljük. A δ határozza meg ugyanis azon intervallumok hosszát, amelyeken integrálunk, és az a feltétel szerint tetszőlegesen kicsi lehet. Lehet gyengíteni ezt a feltételt oly módon, hogy csak egy tetszőlegesen nagy δ-ra teljesüljön az η UWIP$(\delta, 2S)$ tulajdonsága, ha a g-ről teszünk fel valami erősebbet. Ehhez nyilvánvalóan azt a tételt kell átírni, amelyik a δ_0-t szolgáltatta, vagyis a 7.3 segédtételt. Azt is úgy, hogy a δ_0 tetszőleges lehessen.

7.7. Segédtétel. Tegyük fel, hogy $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ Lebesgue-mérhető függvény, $|x(t)| \leq M$, $g : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ Borel-mérhető függvény, $g(s) \leq K$ és tegyük fel, hogy létezik egy $g_1 : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ pozitív, monoton nem csökkenő függvény, hogy $g_1(s) \leq g(s)$. Ekkor bármely $\delta_0 > 0$-ra és $\varepsilon > 0$-ra létezik $\gamma > 0$, hogy $\|x_{t_1}\|_g \geq \varepsilon$-ból következik, hogy $\|x_t\|_g \geq \gamma$ minden $t \in [t_1, t_1 + \delta_0]$-ra.

Biz: Ugyanúgy, ahogy a 7.3. segédtételnél létezik $S > 0$, hogy $\int_{-\infty}^{-S} g(s)ds \leq \varepsilon/2M$, vagyis $\int_{-S}^{0} g(s)|x_{t_1}(s)|ds \geq \varepsilon/2$. Ha mármost $t \in [t_1, t_1 + \delta_0]$, akkor

$$\int_{-\infty}^{0} g(s)|x_t(s)|ds \geq \int_{-S-(t-t_1)}^{-(t-t_1)} g(s)|x_t(s)|ds = \int_{-S}^{0} g(s-(t-t_1))|x_{t_1}(s)|ds =$$
$$\int_{-S}^{0} g(s)|x_{t_1}(s)|\frac{g(s-(t-t_1))}{g(s)}ds \geq \int_{-S}^{0} g(s)|x_{t_1}(s)|\frac{g(-S-\delta_0)}{K}ds \geq$$
$$\frac{\varepsilon g_1(-S-\delta_0)}{2K} =: \gamma$$

és a bizonyítás teljes.

Ezt az segédtétel a 7.3. helyett használható a bizonyításokban, így a következő tételhez jutunk.

7.8. Tétel. Tegyük fel, hogy $g : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ korlátos és Borel-mérhető függvény, létezik $g_1 : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ pozitív, monoton nemcsökkenő függvény, hogy $g_1(s) \leq g(s)$, és $\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ UWIP$(\delta, 2S)$ valamilyen $\delta > 0$-ra. Ha létezik olyan $V : \mathbf{R} \times \mathcal{C}^\infty \to \mathbf{R}$ folytonos funkcionál és $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{K}$ függvények úgy, hogy

a; $W_1(|x(t)|) \leq V(t, x_t) \leq W_2(|x(t)| + \|x_t\|_g)$,

b; $\dot{V}(t, x_t) \leq -\eta(t) W_3(\|x_t\|_g)$.

Ekkor a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

Tekintsük a 6. fejezetben bemutatott példát. Eljutottunk a

$$\dot{V}_{(6.1)}(t, x_t) \leq -\left[a(t) - c\alpha \int_t^\infty |b(s)|ds\right] |f(x(t))| -$$
$$\left(\alpha\beta \int_t^\infty |b(s)|ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right) \int_{-\infty}^{t} e^{\beta(s-t)}|g(x(s))|ds$$

egyenlőtlenségig. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\alpha \geq 0$, hogy $\left[a(t) - c\alpha \int_t^\infty |b(s)|ds\right] \geq 0$, így

$$\dot{V}_{(6.1)}(t, x_t) \leq -\left(\alpha\beta \int_t^\infty |b(s)|ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right) \int_{-\infty}^{t} e^{\beta(s-t)}|g(x(s))|ds$$

Ha $|g(x)| \geq W_1(|x|)$ valamilyen $W_1 \in \mathcal{K}$ függvényre, akkor a 6.1 segédtétel szerint létezik $W_2 \in \mathcal{K}$, hogy

$$\dot{V}_{(6.1)}(t, x_t) \leq -\left(\alpha\beta \int_t^\infty |b(s)|ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right) W_2(\frac{1}{\beta}\|x_t\|_h),$$

ahol h ugyanaz a függvény, mint a 6. fejezet végén. Ezzel bebizonyítottuk a 7.8. tétel b; feltételét. Az a; feltételt már a 6. fejezetben beláttuk.

Összefoglalva a szükséges feltételeket kapjuk, hogy a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis, ha létezik olyan $\alpha \geq 0$ szám, hogy teljesülnek a következő feltételek:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |b(v)|dv < \infty$,
2. az $\left(\alpha\beta \int_t^{\infty} |b(s)|ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right)$ függvény nemnegatív és UPIM$(\delta, 2S)$ valamilyen $\delta > 0$-ra és $S > S_0$-ra (S_0 a 7.4. lemmában volt definiálva),
3. $\left[a(t) - c\alpha \int_t^{\infty} |b(s)|ds\right] \geq 0$
4. $|g(x)| \leq c|f(x)|$ minden $x \in \mathbf{R}^n$-re, ahol $c \in \mathbf{R}$ konstans,
5. $W_1(|x|) \leq |g(x)| \leq W_2(|x|)$ valamilyen $W_1, W_2 \in \mathcal{K}$ függvényekre.

8. A D tétel általánosítása

A D tétel általánosítását rögtön olyan formában mondjuk ki, hogy az η szerepel a $\dot{V}$ felső becslésében. Ez a tétel η nélkül szerepel Burton és Zhang cikkében [**3**, 8. tétel (d)]. Először belátunk egy olyan lemmát, amely a 7.4. lemmának és 7.3. segédtételnek felel meg a C tétel általánosításánál. Vagyis olyan segédtételt bizonyítunk, amely az $|x(t)| + \|x_t\|_g$ mérték egy intervallumon való nagy voltából következtet az $|x(t)|$ mérték nagyságára egy elegendően nagy halmazon. Megtartjuk az előző fejezet jelöléseit.

8.1. Lemma. Tegyük fel, hogy $g(s) \le K$ és $|x(t)| \le M$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, $S' > 0$ úgy, hogy $\int_{-\infty}^{-S'} g(s)ds \le \varepsilon/3M$ és $S = S' + \varepsilon/4MK$. Ha létezik $t_1 \ge t_0 + S$, hogy $|x(t)| + \|x_t\|_g \ge \varepsilon$ minden $t \in [t_1 - S, t_1]$-re, akkor létezik $Q \subseteq [t_1 - S, t_1]$, hogy $\mu(Q) \ge \varepsilon/4MK$ és $|x(t)| \ge \varepsilon/4SK$ minden $t \in Q$-ra.

Biz: Tegyük fel indirekt módon, hogy nem ez az eset áll fenn, így létezik $t_2 \in [t_1 - \varepsilon/4MK, t_1]$, hogy $|x(t_2)| < \varepsilon/4SK$. Feltehetjük, hogy $4SK \ge 6$, így $\|x_{t_2}\|_g \ge 5\varepsilon/6$. Ekkor $5\varepsilon/6 \le \|x_{t_2}\|_g = \int_{-\infty}^{0} g(s)|x_{t_2}(s)|ds = \int_{-\infty}^{-S'} + \int_{-S'}^{0} \le \int_{-\infty}^{-S'} g(s)Mds + \int_{-S'}^{0} \le \varepsilon/3 + \int_{-S'}^{0}$, amelyből kapjuk a $\varepsilon/2 \le \int_{-S'}^{0} g(s)|x_{t_2}(s)|ds$ egyenlőtlenséget. Legyen $u = \varepsilon/4S'$, $Q_u = \{s \in [-S', 0] : g(s)|x_{t_2}(s)| \ge u\}$ és $Q_u^c = [-S', 0] \setminus Q_u$. Most tehát $\varepsilon/2 \le \int_{-S'}^{0} g(s)|x_{t_2}(s)|ds = \int_{Q_u} + \int_{Q_u^c} \le MK\mu(Q_u) + u(S' - \mu(Q_u))$, vagyis $\mu(Q_u) \ge (\varepsilon/2 - uS')/(MK - u) \ge \varepsilon/4MK$. Sőt, ha $s \in Q_u$, akkor $|x_{t_2}(s)| = |x(t_2 + s)| \ge u/g(s) \ge U/K = \varepsilon/4S'K \ge \varepsilon/4SK$. Legyen $Q = Q_u + t_2 = \{s + t_2 : s \in Q_u\}$ és a bizonyítás kész.

Ezek után már definiálhatjuk az η-ra tett feltételt. Már tudjuk, hogy egy S hosszú intervallumból egy kis mértékű halmazon tudjuk bizonyítani az $|x(t)|$ nagy voltát, így az η ezen halmazon nem lehet túl kicsi. Tekintsük a következő definíciót.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ függvény *mértékben egyenletesen pozitív az S paraméterrel* (jelben: UPIM(S)), ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$, hogy ha $t \ge t_0 + S$, $Q \subseteq [t - S, t]$ és $\mu(Q) \ge \varepsilon$, akkor $\int_Q \eta(s)ds \ge \delta$.

Most pedig lássuk a tételt.

8.2. Tétel. Tegyük fel, hogy $g : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R}_+$ korlátos. Ha létezik $V : \mathbf{R} \times \mathcal{C}^\infty \to \mathbf{R}$ folytonos funkcionál és $W_1, W_2, W_3 \in \mathcal{K}$ függvények úgy, hogy

a; $W_1(|x(t)|) \le V(t, x_t) \le W_2(|x(t)| + \|x_t\|_g)$, b; $\dot{V}(t, x_t) \leq -\eta(t) W_3(|x(t)|)$,

ahol η UPIM(S) függvény minden $S > 0$-ra, akkor a (2.1) differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

Biz: Az egyenletes stabilitás ugyanúgy belátható, ahogyan azt a 7.5. tételben tettük. Legyen γ az egyenletes stabilitás definíciójában az $\varepsilon = 1$-hez tartozó szám, vagyis ha $\|x_{t_0}\| < \gamma$, akkor $|x(t)| \leq 1$ minden $t \geq t_0$-ra. Sőt $V(t_0, x_{t_0}) \leq W_2(|x(t_0)| + \|x_{t_0}\|_g) \leq W_2(2)$. Találnunk kell egy $T > 0$-t minden $\nu > 0$-ra úgy, hogy $\|x_{t_0}\| < \gamma$-ból következzen a $|x(t)| < \nu$ minden $t \geq t_0 + T$-re. Legyen $\varepsilon = W_2^{-1}(W_1(\nu))$, S ugyanaz, mint a 8.1. lemmában, $\delta > 0$ a mértékben való egyenletes pozitivitás definíciójából az $\varepsilon/4MK$-hoz tartozó szám, $N = [W_2(2)/(W_3(\varepsilon/4SK)\delta) + 1]$ és $T = SN$. Tegyük fel indirekt módon, hogy ez a T nem megfelelő, vagyis létezik $t' \geq t_0 + T$, hogy $|x(t')| \geq \nu$. Most ha $t \in [t_0, t']$, akkor $|x(t)| + \|x_t\|_g \geq W_2^{-1}(V(t, x_t)) \geq W_2^{-1}(V(t', x_{t'})) \geq W_2^{-1}(W_1(|x(t')|)) \geq W_2^{-1}(W_1(\nu)) = \varepsilon$. A 8.1. lemma szerint kapunk $Q_i \subseteq [t_0 + (i-1)S, t_0 + iS]$ $(i = 1, 2, ..., N)$ halmazokat úgy, hogy $|x(t)| \geq \varepsilon/4SK$ minden $t \in Q_i$-re és $\mu(Q_i) \geq \varepsilon/4MK$. Most

$$\begin{aligned} V(t_0 + T, x_{t_0+T}) \leq & V(t_0, x_{t_0}) + \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{V}(s, x_s) ds \leq W_2(2) - \int_{t_0}^{t_0+T} \eta(s) W_3(|x(s)|) ds \leq \\ & W_2(2) - \sum \int_{Q_i} \eta(s) W_3(|x(s)|) ds \leq \\ & W_2(2) - W_3(\varepsilon/4SK) \sum \int_{Q_i} \eta(s) ds \leq \\ & W_2(2) - W_3(\varepsilon/4SK) N\delta < 0 \end{aligned}$$

az N definíciója szerint, ami ellentmondás. Ezzel a bizonyítás teljes.

Visszatérve a 6. fejezetben mutatott példához eljutottunk odáig, hogy

$$\dot{V}_{(6.1)}(t, x_t) \leq -\left[a(t) - c\alpha \int_t^\infty |b(s)| ds\right] |f(x(t))| - \\ \left(\alpha\beta \int_t^\infty |b(s)| ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right) \int_{-\infty}^t e^{\beta(s-t)} |g(x(s))| ds.$$

Tegyük fel, hogy van olyan $\alpha \geq 0$ szám, amelyre $\left(\alpha\beta \int_t^\infty |b(s)| ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right) \geq 0$, így

$$\dot{V}_{(6.1)}(t, x_t) \leq -\left[a(t) - c\alpha \int_t^\infty |b(s)| ds\right] |f(x(t))|.$$

Már nagyon hasonlít a b; feltételbeli becslésre ez az egyenlőtlenség, de még nem pontosan olyan. Először is arra van szükségünk, hogy az η függvény, az $|f(x(t))|$ együtthatója nemnegatív legyen és UPIM(S) legyen minden $S > 0$-ra. Továbbá szükségünk van arra, hogy az $|f(x(t))|$ függvényeiből valamilyen módon $W_1(|x(t)|)$ alakú függvényt hozzunk be, ahol $W_1 \in \mathcal{K}$. Igy tehát meg kell követelnünk a $W_1(|x|) \leq |f(x)|$ egyenlőtlenséget, és kapjuk a következő becslést:

$$\dot{V}_{(6.1)}(t, x_t) \leq -\left[a(t) - c\alpha \int_t^\infty |b(s)|ds\right] W_1(|x(t)|)$$

A 8.2. tétel a; feltételét már bebizonyítottuk a 6. fejezetben.

Összefoglalva tehát azt bizonyítottuk, hogy a (6.1) funkcionál-differenciálegyenlet $x = 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis, ha létezik olyan $\alpha \geq 0$ szám, hogy teljesülnek a következő feltételek:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |b(v)|dv < \infty$,
2. $a(t) - c\alpha \int_t^\infty |b(s)|ds$ nemnegatív és UPIM(S) minden $S > 0$-ra,
3. $\left(\alpha\beta \int_t^\infty |b(s)|ds + (\alpha - 1)|b(t)|\right) \geq 0$
4. $|g(x)| \leq c|f(x)|$ minden $x \in \mathbf{R}^n$-re, ahol $c \in \mathbf{R}$ konstans,
5. $W_1(|x|) \leq |f(x)|$ valamilyen $W_1 \in \mathcal{K}$ függvényre,
6. $|g(x)| \leq W_2(|x|)$ valamilyen $W_2 \in \mathcal{K}$ függvényre.

Nem olyan sok ez a feltétel, mint amilyennek látszik. Az első szükséges ahhoz, hogy a differenciálegyenlet jobb oldalán az integrálnak véges értéke legyen. A 2. és 3. feltétel kell a 8.2. tételhez, a többi pedig olyasmit állít, hogy a $|g(x)|$ kicsi az $|f(x)|$-hez képest. Megjegyzendő, hogy az állításainkból kiderül, hogy az 4. feltétel nem lenne szükséges. Ezt csak azért vettük bele, mert enélkül a becslések túl bonyolulttá válnak. Nyilvánvaló, hogy a 5. és 6. feltételből is kapható egy a $|g(x)|$-t $|f(x)|$-kel felülről becslő egyenlőtlenség.

Irodalomjegyzék

1. T. A. Burton, *Volterra Integral and Differential Equations,* Academic Press (1983).
2. T. A. Burton & L. Hatvani, Stability Theorems for Nonautonomous Functional Differential Equations by Liapunov Functionals, *Tohoku Mathematical Journal,* **41,** 65-104 (1989).
3. T. A. Burton & Shunian Zhang, Unified Boundedness, Periodicity, and Stability in Ordinary and Functional Differential Equations, *Annali di Matematica pura ed applicata,* **145**, 129-158 (1986).
4. R. D. Driver, Existence and Stability of Solutions of a Delay-Differential System, (1962).
5. W. K. Ergen, Kinetics of the Circulating-Fuel Nuclear Reactor, *Journal of Applied Physics,* **25**, 702-711 (1953).
6. J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, (1977).
7. L. Hatvani, On the Asymptotic Stability of Solutions of Functional Differential Equations, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **53,** 227-238 (1988).
8. V. Lakshmikantham, S. Leela & A. A. Martynyuk, *Stability Analysis of Nonlinear Systems,* Marcel Dekker, New York (1989)
9. G. Makay, On the Asymptotic Stability in Terms of Two Measures for Functional Differential Equations, *Journal of Nonlinear Analysis* **16,** 721-727 (1991)
10. S. S. Somolinos, Periodic Solutions of the Sunflower Equation $\ddot{x}+(a/r)\dot{x}+(b/r)\sin x(t-r)=0$, *Quarterly of Applied Mathematics,* 465-478 (1978).