Amikor a tanár (is) hibázik

MÁDER ATTILA[11]

1. Bevezetés

Az egzaktságáról „híres" és arra méltán büszke matematikában különösen zavaró anomáliákkal, következetlenségekkel találkozni. Főleg úgy, hogy ezért a felelősség nem is a matematikát, hanem a legtöbb esetben annak használóit terheli. Önnön makacsságunk, nem (teljes mértékben) körültekintő fogalomhasználatunk, illetve sokszor hanyag jelöléseink hatására nem mindig azt mondjuk, amit szeretnénk, illetve mondandónk mások számára nem feltétlenül jelenti azt, amit számunkra.

Ezért a tanári munka során különösen nagy károkat okozhat, ha nem figyelünk a pontos fogalmazásra, illetve a helyes fogalomhasználatra. Ha az alapok nem szilárdak, nem áll biztos lábakon a rájuk épített vár sem.

Megpróbáljuk három szempont szerint csoportosítani a hibákat. Az egyik a rossz fogalmazásból, a másik a pontatlan fogalomhasználatból adódó hibák csoportja lesz. Külön csoportot képviselnek a jelölési hibák.

2. Rossz fogalmazásból adódó hibák

A kérdéskör igen bonyolult. Nem egyértelmű, hogy mit is nevezünk, nevezhetünk hibának, és hol húzódik a szubjektivitás, az egyéni ízlés, a tanári kreatitvitás határa.

2.1 ÍZLÉSEK ÉS... (EGY FELADAT ÉS MEGJEGYZÉSE)

1. feladat *Bizonyítsuk be, hogy ha a*

$$\cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{b_3 + \dots \cfrac{\cfrac{b_{n+1}}{m}}{m}}{m}}{m}}{m}$$

felfelé menő lánctört értéke 0, akkor m egy gyöke lesz a

$$b_1x^n + b_2x^{n-1} + \dots + b_nx + b_{n+1} = 0$$

egyenletnek.

<< POLYGON, XV./2., 2007. JÚNIUS, POLYGON KIADÓ, SZEGED >>

Megjegyzés. A feladat szövegében az „egy" fölösleges és zavaró; a „lesz" is fölösleges.

[11]SZTE TTIK Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1., SZTE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, 6722 Szeged, Szentháromság u. 2., Tömörkény István Gimnázium és Művészeti Szakközépiskola, 6720 Szeged, Tömörkény utca 1., madera@math.u-szeged.hu

2.2 Számítsuk ki!

Élő, használatban lévő példatárakból, tankönyvekből származnak a következő példák:

- Számítsuk ki $\sqrt{6^{\log_6 36}}$!
- Mivel egyenlő $10^{\frac{1}{2}\lg 4}$?
- Mennyi a pontos értéke $\lg\sqrt{28}+\lg 8+3\cdot\lg 5+\lg\sqrt{175}-\lg 7$?
- Mennyi $(-3)^0$?
- Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést $\sqrt[3]{b^{6-\log_b 8}}$!
- Hozza a lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezést $\log_5 15+\log_5 35-\log_5 21$!

Milyen választ fogadunk el az előbbi kérdésekre? Mit értünk azon, hogy „pontos érték", mit jelent egy ilyen kifejezés „kiszámítása"? Hasonló kérdések esetén elfogadhatók a következő típusú válaszok?

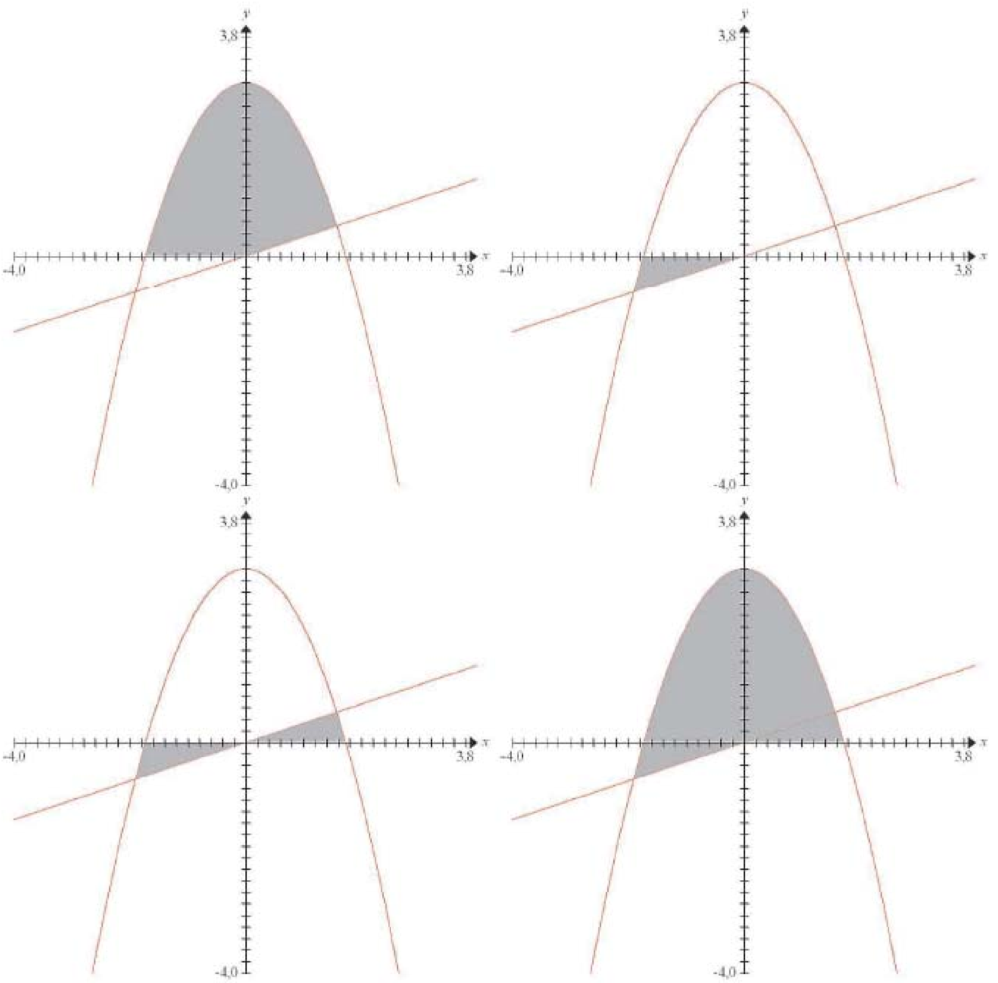
- $\sin 30^\circ$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\log_2 3^2$
- $\log_4 8$

Biztosak vagyunk abban, hogy diákjaink is az általunk megszokott konvenciók mentén értelmezik ezeket a kifejezéseket?

2.3 Egy feladat és „megoldásai"

2. feladat *Számítsa ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az* $y=-x^2+3$, $y=\frac{1}{3}x$ *és az* $y=0$ *egyenletű görbék által határolt síkrész* x *tengely körüli forgatásakor kapunk!*

<< ÖSSZEFOGLALÓ FELADATGYŰJTEMÉNY MATEMATIKÁBÓL, 3893. FELADAT, NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST >>



1. ábra: A görbék és a síkrész

Megoldás. De melyik is a fenti síkrész? Melyik a helyes megoldás az alábbiak közül? Mivel indokolnánk diákjaink számára, hogy éppen arról a síkrészről van szó? Van egyáltalán „univerzálisan" elfogadott, elfogadható megoldás, vagy csak megint valamely ránkkövesedett konvenció alól nem tudunk kitörni?

2.4 AZ EGYENES EGYENLETE(I) A KOORDINÁTAGEOMETRIÁBAN

Példatárak, tankönyvek fejezeteinek címeként gyakran feltünik: **Az egyenes egyenletei**.
Az általánosan használatban lévő definíció a következő:

1. Definíció *Az egyenes egyenlete olyan egyenlet, melyet az egyenes pontjainak koordinátái kielégítenek, és más pontok koordinátái nem elégítenek ki.*

Kicsit pontosabb, és körültekintőbb a következő megfogalmazás:
Az egyenes koordinátageometriája: Az (x,y) síkban minden egyenesnek kétismeretlenes elsőfokú egyenlet felel meg: $Ax+By+C=0$, ahol A és B nem egyszerre 0. Az egyenletet bármilyen nemnulla konstanssal végigszorozva, ugyanazt az egyenest jellemzi. Fordítva: minden elsőfokú kétismeretlenes egyenletnek csak egy egyenes felel meg a síkban.

A fentiek alapján indokolatlan a többesszám használta, sőt hibák forrásává válhat. Nem ritka ezekután, hogy diákjaink *az egyenes irányvektoros egyenlete* ismeretében elkezdik keresni a *normálvektoros egyenlet*et is. Helyesebb *az egyenes egyenletének normálvektor segítségével felírt alakja*, vagy egyszerűen csak *az egyenes egyenletének normálvektoros alakja* megfogalmazások használata. Mindezek tükrében furcsán hathat a következő felsorolás:

- $2x-3y=5$
- $-4x+6y=-10$
- $2x^3-3x^2y+2x-5x^2-3y-5=0$
- $(x^2+1)(2x-3y-5)=0$

A fentiekben ugyanis ugyanannak a ponthalmaznak (egyenesnek) adtuk meg más-más alakban az egyenletét. Vagy az egyenleteit?

2.5 IGAZ, VAGY CSAK LEHET, HOGY IGAZ?

Az egyik (2005. évi) nyolcadik osztályos felvételi feladatsor egyik eleme volt a következő:

	BIZTOSAN IGAZ	LEHET, HOGY IGAZ	LEHETETLEN
Az első tíz prímszám összege páratlan.			

Az ilyen típusú kérdéseknél nincs három választási lehetőség. Ha a tanuló nem tudja meghatározni a fenti összeg paritását, akkor nyugodtan rámondhatja: *lehet, hogy igaz*. És ezzel nem ad hibás választ! (Bár ezt a javítási útmutató természetesen nem fogadta el.)

A helyes szemlélet kialakulását sokkal jobban zavarja azonban ugynazon feladatsor egy másik eleme:

	BIZTOSAN IGAZ	LEHET, HOGY IGAZ	LEHETETLEN
Egy paralelogramma átlói felezik a belső szögeket.			

Az ilyen mondatokat mindig a következőképp értjük: *Minden* paralelogramma átlói felezik egymást. Így a fenti mondat *hamis*. Nem igaz rá sem az, hogy igaz, sem az, hogy lehet, hogy igaz, sem az, hogy lehetetlen. Ilyen esetben ugyanis arra gondolunk, hogy az állítás *minden* paralelogrammára fennáll, ami persze itt nem teljesül, még akkor sem, ha *van olyan* paralelogramma amely átlói felezik a szögeit.

Az ilyen, három- vagy többértékű logika megjelenése az állítások értékelésében maga után vonhatja azt is, hogy ha a diákok ezt megszokják, alkalmazni fogják az állításaik megfogalmazásában is.

Más a helyzet, s más a helyes táblázat akkor, ha például ezt állítjuk:

	BIZTOSAN IGAZ	LEHET, HOGY IGAZ	LEHETETLEN
Egy szabályos dobókockát feldobva a dobott szám tökéletes.			

Kizárólag az ilyen, véletlentől függő igazságértékek esetében van értelme, a *lehet, hogy igaz* választási lehetőségnek.

Azonban egy eldöntendő kérdésre sem tudunk mindig igen/nem választ adni, ha nem áll elég információ a rendelkezésünkre, de ilyenkor sem a *lehet, hogy igaz* választási lehetőséget kell megadnunk:

Az A számról tudjuk, hogy osztható 9-cel és 6-tal.

	IGAZ	HAMIS	NEM ELDÖNHETŐ
Az A szám osztható 54-gyel.			

3. Pontatlan fogalomhasználatból adódó hibák

3.1 $0 \in \mathbb{N}$ VAGY $0 \notin \mathbb{N}$

„DIE NATÜRLICHEN ZAHLEN HAT DER LIEBE GOTT GESCHAFFEN; ALLES ANDERE IST MENSCHENWERK."

<< (KRONECKER (1823–1891)) >>

A kérdés örök. A nulla természetes szám, vagy nem?

Történeti okora hivatkozva sokan nem tartják annak, de akik a mai általános iskolás könyvekből tanulnak (tanítanak), igen:

2. Definíció *A véges halmazok elemeinek a számát természetes számoknak nevezzük.*

<< SOKSZÍNŰ MATEMATIKA 5. MOZAIK KIADÓ, SZEGED >>

A természetes számok Peano-féle axiómarendszerének első axiómája is így szól: *A 0 természetes szám.*

Ha abból a pszichológiai megközelítésből indulunk ki, miszerint a természetes számok a mindennapi életben használt leszámlálás során absztrahálódó számaink, akkor a nullát megint csak nem tekinthetjük természetesnek.

Történeti, axiomatikus, halmazelméleti, pszichológiai okokból lehet, hogy nem mindegy, hogy a nulla természetes szám-e, vagy sem, de a középikolai használat szempontjából igen.

3.2 A PERIODICITÁS ÉS A PERIÓDUS

Két dudás nem fér meg egy csárdában, tartja a mondás. Nézzük meg, milyen következményei lehetnek, ha többen is ugyanabban a csárdában muzsikálnak. A következő definíciók mindegyike elterjedt, használatban lévő tankönyvekből származik.

3. Definíció *Az f függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik olyan $p \neq 0$ valós szám, hogy értelmezési tartománya minden x pontjára $x+p$ is az értelmezési tartományba tartozik, és $f(x+p)=f(x)$. p -t a függvény periódusának mondjuk.*

Megjegyzés. Ez alapján periodikus a konstansfüggvény, és bármely nemnulla valós szám a periódusa. Szintén periodikus a szinuszfüggvény is, periódusai: $\ldots,-4\pi,-2\pi,2\pi,4\pi,\ldots$.

Szintén periodikus a nemnegatív számok halmazára megszorított szinuszfüggvény is, periódusai: $2\pi, 4\pi, \ldots$.

4. Definíció *Az f függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik olyan $p > 0$ valós szám, hogy értelmezési tartománya minden x pontjára $x + p$ is az értelmezési tartományba tartozik és $f(x + p) = f(x)$. A legkisebb ilyen p -t a függvény periódusának mondjuk.*

Megjegyzés. Ez alapján periodikus a konstansfüggvény de periódusa nincs. Szintén periodikus a szinuszfüggvény is, periódusa 2π. Szintén periodikus a nemnegatív számok halmazára megszorított szinuszfüggvény is, periódusa szintén 2π.

5. Definíció *Az f függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik olyan $p > 0$ valós szám, hogy értelmezési tartománya minden x pontjára $x \pm p$ is az értelmezési tartományba tartozik és $f(x \pm p) = f(x)$. A legkisebb ilyen p -t a függvény periódusának mondjuk.*

Megjegyzés. Ez alapján periodikus a konstansfüggvény de periódusa nincs. Szintén periodikus a szinuszfüggvény is, periódusa 2π. Nem periodikus viszont a nemnegatív számok halmazára megszorított szinuszfüggvény. Ekkor mondhatjuk, hogy ez a függvény egy periodikus függvény leszűkítése.

3.3 NÉHÁNY PÉLDA A ,,FELSŐBB" MATEMATIKÁBÓL

3.3.1 A rendezett halmaz fogalmának rendezetlensége

A fogalmat használók egy része megköveteli a dichotomiát, azaz más szóhasználattal élve *teljesen rendezett, lineárisan rendezett* halmazról beszél, míg mások nem teszik fel, hogy bármely két elem összehasonlítható, így ők *részben rendezett* halmaz értelemben használják a fogalmat. A félreértések elkerülése végett a legtöbb szerző egyszerűen nem használja a kifejezést, vagy ha igen, az olvasó feladata az, hogy megnézze, megértse, a szerző éppen melyik értelemben használja a rendezett halmaz fogalmát.

3.3.2 Multiplikatív függvények

A számelméletben is találkozhatunk hasonló anomáliával. Ilyen a számelméleti függvények kapcsán a *gyengén multiplikatív – multiplikatív,* illetve a *multiplikatív – teljesen multiplikatív* elnevezéspár kérdése.

6. Definíció *Egy f számelméleti függvény multiplikatív, ha bármely $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$ esetén $f(ab) = f(a)f(b)$. Ha az $(a, b) = 1$ feltétel elhagyható, akkor teljesen (totálisan) multiplikatív számelméleti függvényről beszélünk.*

7. Definíció *Egy f számelméleti függvény gyengén multiplikatív, ha bármely $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$ esetén $f(ab) = f(a)f(b)$. Ha az $(a, b) = 1$ feltétel elhagyható, akkor multiplikatív számelméleti függvényről beszélünk.*

Annak eldöntése, hogy éppen melyik szóhasználatáról van szó, ha csak annyit látunk, hogy multiplikatív függvény az értő olvasótól is hosszas vizsgálódást igényelhet.

4. Jelölésből adódó hibák

4.1 Határérték, de hol?

Sorozatok határértékére vonatkozóan többször feltűnik (terjedőben van?) a következő jelölés:

$$\lim a_n$$

A későbbiekben ezen jelölés használatának értelemzavaró következményei lehetnek a függvények határértékének kapcsán. Ez alapján a végtelenben a megszokott $\lim_{x\to\infty} f(x)$ helyett a $\lim f(x)$ lenne használatos. És a mínusz végtelenben? Vagy valamely véges pontban? Vagy csak akkor nem írunk ki semmit, ha a plusz végtelenben vett határértékre gondolunk?

Függvények határértékére vonatkozóan többször feltűnik (terjedőben van?) a következő jelölés:

$$\lim_{\infty} f(x),$$

ahol most éppen a változó hosszadalmas és fáradságos leírását spóroltuk meg. Előnye nincs, hátránya és következetlensége a többváltozós függvények határértékének kérdésekor viszont jól kitűnik.

4.2 Halmazok összege

Minden függvénytáblában megtalálható a következő:

Integrálási szabályok:

- $\int c f(x)dx = c\int f(x)dx$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Ne feledjük a definíciót sem:

8. Definíció *Egy f függvény antideriváltjainak (primitív függvényeinek) halmazát az f határozatlan inegráljának nevezzük, és így jelöljük:*

$$\int f(x)dx$$

Így tehát halmazokat adunk össze? Mit is értünk két halmaz íly módon vett összegén? Persze minden érthetővé válik a következő, sajnos sokszor hiányzó megjegyzéssel:

Az $\int f(x)dx$ nem egy függvényt, hanem egy függvényhalmazt jelent. A bevezetett jelöléssel kapcsolatban megjegyezzük, hogy ha $c \in \mathbb{R}$, akkor az $\int c f(x)dx$ az $\int f(x)dx$ függvényhalmaz elemeinek c-szereseiből áll; az $\int (f(x)+g(x))dx$ függvényhalmaz elemeit az $\int f(x)dx$ és az $\int g(x)dx$ függvényhalmaz egy-egy elemének az összeadásával nyerjük....

4.3 (SOROZATOK), {SOROZATOK}, <SOROZATOK>, $\cdots$

A sorozatok tanításakor (a kezdetekben!) kínosan ügyelünk arra, hogy a sorozatot elkülönítsük annak általános tagjától:

- $\{a_n\} = 2n+3$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2n+3$
- $(a_n) = 2n+3$
- $< a_n >= 2n+3$
- $a_n = 2n+3$, $n = 1,2,3\ldots$

Ugyanakkor:

- $a_{2k-1} = 0,\ a_{2k} = 1,\ k \in \mathbb{Z}^+$
- $f_1 = f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ha $n \geq 3$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Például a rekurzív módon megadott sorozatok kapcsán nincs is használatban hasonló elkülönülést segítő jelölésrendszer. Az elsőként felsorolt jelöléssel szemben további jogos ellenérv, hogy könnyedén összetéveszthető a halmazoknál megszokott jelöléssel. Az ugyanis, hogy magáról a sorozatról vagy egy adott tagjáról van szó, mindig egyértelmű.

5. Zárszó

A fentiekben esetenként szőrszálhasogatásnak tűnő észrevételeknek azonban hasonló kérdésekben fontos szerepe van, hiszen a helytelenül értelmezett definíciók sokszor rossz szemlélethez és ebből adódóan hibás gondolatmenethez vezethetnek. Azt, ami egyszer már hibásan bevésődött, és esetleg más fogalmak már épültek rá, sokkal nehezebb kijavítani, mint annak előtte figyelni a fogalom helyes kialakítására.

A kérdéskör vizsgálatának jogosságát jelzi a konferencián az előadás alatt és után a kollegák között kialakult heves vita is. Ott sem sikerült meggyőzni senkinek a másikat a saját igazáról. Ott ez elintéződött egy-egy konklúzió nélkül félbeszekadt beszélgetéssel. De mi a helyzet egy-egy érettségi felvételi, vagy versenyfeladat esetén, amikor „vérre" megy a játék?

Egy szög miatt a patkó elveszett
A patkó miatt a ló elveszett
A ló miatt a lovas elveszett
A lovas miatt a csata elveszett
A csata miatt az ország elveszett.
Máskor verd be jól a patkószeget.

<< ANGOL GYERMEKVERS >>