Elemi matematika 2. - MTN324g
Egyenletek (egyenletrendszerek)

1. Feladat. Milyen egyenletmegoldási módszereket ismerünk?

Egyenletek megoldása az értelmezési tartomány, illetve az értékkészlet vizsgálatával

2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^2 + x^6 + x^8 + 27 = 0.$$

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$|x^2 - 6x + 8| + \sqrt{2x - y} + (y + 3z - 1)^2 = 0.$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^2 + \frac{2}{x^2} = 2.$$

Ötlet. Vizsgáljuk az $a + \frac{1}{a}$ alakú kifejezések értékkészletét.

5. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{1 + y^2}.$$

6. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$10x^2 - 8x = 6xy - y^2 - 16.$$

Ötlet. Alakítsunk ki teljes négyzeteket.

7. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész szám(pár)ok halmazán

$$x^2 - 6xy = 25 - 10y^2.$$

Ötlet. Tekintsük x-ben másodfokúnak és írjuk fel a megoldóképletet.

8. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4\cos x + 3\sin x = 7.$$

9. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 1.$$

Ötlet. Minden tényező 1 vagy -1, megfelelő számban.

10. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3\sin x - \cos 2x = 4.$$

Ötlet. Használjuk a $\cos 2x$-re vonatkozó megfelelő addíciós tételt.
Megoldás. $x = \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

11. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1.$$

Ötlet. Használjuk ki, hogy ha $\sin x \neq 1$, akkor $\sin^6 x < \sin^2 x$.
Megoldás. $x = k \cdot \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$.

12. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(\sin x + \cos x)\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

Ötlet. Addíciós tételek alkalmazásával hozzuk ki, hogy az egyenlet $\sin(x+\pi/4)\cdot\sin(2x) = 1$ alakú.
Megoldás. $x = \pi/4 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

13. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{5}{\sqrt{x}+1} + 5\sqrt{x} + 5 = 10 - \sqrt{y^2-36}.$$

14. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a) az egész számok halmazán, b*) a valós számok halmazán

$$\sqrt{5-x} + \sqrt{x-4} = x^2 - 9x + 21.$$

Ötlet.A bal oldal értelmezési tartományának meghatározása után vizsgáljuk a jobb oldal értékkészletét, majd emeljünk négyzetre. Helyettesítsünk.
Megoldás.$x = 4; 5$.

15. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ha $x; y > 1$.

$$\log_x(x^3y^2) + \log_y(y^3x^2) = \sqrt{-y^2+4y+96}$$
$$x^{\log_y z} + y^{log_x z} + (x+y+z)^{\log_x y} = 2019.$$

Ötlet. Az első egyenlet bal oldala $6 + 2\cdot(a+1/a)$ alakú, a jobb oldalon érdemes teljes négyzetté alakítani.
Megoldás.$x = y = 2, z = 664$.

16. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\operatorname{tg}\frac{xy}{7} + \operatorname{ctg}\frac{xy}{7} + \sqrt{9x-14-x^2} + \sqrt{-x^2+18x-77} = x^2 - 7x + 2.$$

17. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3^{2+x} + 3^{-x} = |12\sin y\cos y|.$$

Ötlet. Az első egyenlet bal oldala $3\cdot(a+1/a)$ alakú.

18. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3^{x+y} + 3^{x-y} + \sqrt{-x^2+4} + \sqrt{-x^2+8x-12} = 2(x^3 + \cos(xz)).$$

Ötlet. Alkalmazzuk az előző feladatokban látottakat lépésről-lépésre:
- ÉT a négyzetgyökös kifejezésekre,
- az exponenciális kifejezések $a + 1/)$ alakja,
- a trigonometrikus kifejezés értékkészlete.

19. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{x^2-16x+64} = 4 - (x-6)^2.$$

20. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{x^2-15x+36} + \sqrt{-x^2+19x-84} + \log_{\frac{x}{y}} 36 = 2\cos(3z) - y^2 + 4y - 4.$$

Megoldás. $x = 12,\ y = 2; z = 2/3\cdot k\pi\ k \in \mathbb{Z}$.

21. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2.$$

Megoldás.$x=-1$.

22. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+1=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

«KöMaL C. 873.»

23. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\log_2(1+\cos 2x)=2^{1+\cos 3x}.$$

24. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}.$$

25. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\log_{\sqrt[4]{2}}\frac{2\sin^2 x(1+\operatorname{ctg} x)}{\sin 2x}=-y^2+6y-5.$$

Megoldás. $x=\pi/4+k\pi\ k\in\mathbb{Z},\ y=3.$

26. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$\log_x(x^2y^3)+\log_y(y^2x^3)=\log_{\sqrt[5]{2}}(-z^2+8z-12)$$

$$xyz+xy=2005.$$

Megoldás. $x=y=\sqrt{401},\ z=5.$

27. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3^{y+1}+3^{2x+1}=1+3^{x+2}+\sqrt{6\cdot 3^y-3^{2(y+1)}-1}.$$

28. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\left[x^3\right]+\left[x^2\right]+[x]=\{x\}-1.$$

Ötlet. Az egyenlet bal oldala egész, így a jobb oldala is, vagyis a törtrész 0, ekkor x egész. Az egészrész elhagyható, $(x+1)(x^2+1)=0$ alakban szorzattá alakítható.

29. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$[x]=\left\{x^2-1\right\}+1.$$

Megoldás. $x=1;\sqrt{2};\sqrt{3}.$

30. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$[x-[x]]=\lg x.$$

Megoldás.$x=0,1;1.$

Egyenletek megoldása grafikusan

31. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\log_2(x) = 3 - x.$$

32. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x \cdot \log_2(x) = 2.$$

33. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3^{|x|} + 4^{|x|} = 7^{|x|}$$

Ötlet. Osszunk $4^{|x|}$-nel.

34. Feladat. Hány megoldása van az alábbi egyenletnek?

$$|\sin x| = \frac{2}{2001 \cdot \pi} \cdot x$$

35. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$2^{[x]} = 1 + 2x.$$

36. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$[x]^2 + \{x\} \cdot [x] + 16 = 8\,[x]\,.$$

Egyenletek megoldása szorzattá alakítással, teljes négyzetté kiegészítéssel...

37. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^2 + y^2 = 2y + 2x - 2.$$

Megoldás.$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0.$

38. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$8(x^4 + y^4) - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

39. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^4 - 4x^2 - 12x - 9 = 0.$$

Megoldás. $(x^2)^2 - (2x+3)^2 = 0.$

40. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x + \sqrt[8]{x^5} = 12 \cdot \sqrt[4]{x}.$$

Ötlet. Átrendezzük, $\sqrt[4]{x}$-et kiemelünk...

41. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4^x + 15^x = 10^x + 9^x.$$

Megoldás. Átrendezve $(2^x - 3^x)(2^x + 3^x) - 5^x(2^x - 3^x) = 0$. Innen kiemeléssel szorzattá alakítunk. $2^x = 3^x$ vagy $2^x + 3^x = 5^x$ adódik ez utóbbit úgy oldjuk meg, hogy $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ és a baloldali függvény szigorúan monoton csökken, tehát legfeljebb egy megoldás van, ami láthatóan $x = 1$.

42. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x.$$

Ötlet. Használjuk ki, hogy az egyenlet $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ alakú. Szorozzunk kettővel.

43. Feladat*. Határozzuk meg azokat az x, y, z, t valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = t + \sqrt{x + y + z - t}$$

Megoldás. Rendezzünk át a bal oldalra, és alakítsunk teljes négyzetté alkalmas módon!

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 - t - \sqrt{x + y + z - t} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x + y + z - t} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Ez pedig csak akkor teljesül, ha $x = y = z = \frac{1}{2}$, valamint ezeket az értékeket felhasználva $t = \frac{5}{4}$.

«NMMV 1995. 11. osztály, 5. feladat»

44. Feladat*. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 2xyz(x^2y + y^2z + z^2x).$$

Megoldás. Az egyenlet láthatóan szimmetrikus a változókra nézve. Az első eset, hogy valamelyik változó nulla, legyen ez ekkor x! Ebben az esetben a jobb oldal nulla lesz, és az egyenlet $y^2z^2 = 0$ formára redukálódik, tehát y és z közül az egyik változó nulla, a másik tetszőleges, tehát megoldást kapunk akkor, ha egy változó értékét tetszőlegesre választjuk, a másik kettőét pedig nullára.

Ha egyik változó sem 0, akkor osszuk el mindkét oldalt $x^2y^2z^2$-tel!

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right)$$

$$\left(x^2 - 2\frac{x}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z^2 - 2\frac{z}{y} + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y^2 - 2\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$$

Ez pedig csak akkor állhat fenn, ha $x = \frac{1}{z}$, valamint $z = \frac{1}{y}$, ebből $x = y$, másrészt a harmadik tagból $y = \frac{1}{x}$ következik, tehát csak $x = y = 1$ lehet a megoldás (ekkor nyilván $z = 1$ is teljesül), vagy pedig $x = y = -1$ (ekkor $z = -1$). Így tehát a megoldás: vagy mindhárom változó 1, vagy mindhárom -1, vagy két változó 0, és a harmadik tetszőleges.

« NMMV 2000. 11. osztály 1. feladat»

45. Feladat. Oldjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 2yz &= 100 \\ 2xy - z^2 &= 100 \end{aligned}\right\}$$

Ötlet. Vonjuk ki egymásból a két egyenletet, majd vegyük észre a teljes négyzeteket.

46. Feladat. Oldjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 10y + 41 &= 0 \\ y^2 - 2z - 23 &= 0 \\ z^2 - 6x + 17 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ötlet. Adjuk össze az egyenleteket.

47. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2.$$

Ötlet. Teljes négyzetek vannak a gyök alatt, ez $a = \sqrt{x-1}$ helyettesítéssel szépen látszik is.

Megoldás. $1 \le x \le 2$.

48. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

49. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{x + 1 + 4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x + 1 - 4\sqrt{x-3}} = 4.$$

50. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{x + 22 - 10\sqrt{x-3}} + \sqrt{x + 6 - 6\sqrt{x-3}} = 2.$$

51. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1.$$

52. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet ($a>0$),

$$\sqrt{\frac{x+3a}{4a}+\sqrt{\frac{x-a}{a}}}+\sqrt{\frac{x+3a}{4a}-\sqrt{\frac{x-a}{a}}}=2.$$

Megoldás. $5a \geq x \geq a$

53. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{3}\sin y+4x=x^2-\cos y+6$$

54. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^3-x^2-x=\frac{1}{3}.$$

Ötlet. 3-mal szorozva és x^3-t hozzáadva: $4x^3=(x-1)^3$-re vezet.

55. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^3-3x^2+3x+7=0.$$

Ötlet. $(x-1)^3-8=0$.

56. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^4+4x^3+6x^2+4x-2=0.$$

Ötlet. $(x+1)^4-3=0$

57. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$9x^3+3x^2+3x+1=0.$$

Ötlet. $(x+1)^3+8x^3=0$.

58. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3x^4+4x^3-6x^2+4x-1=0.$$

Megoldás. $4x^4-(x-1)^4=0$

59. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^4-6x^3+9x^2-25=0.$$

Megoldás. $(x^2-3x)^2-25=0$.

60. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^4-4x^2+8x-4=0.$$

Megoldás. $x^4-(x-1)^2=0$ $x=-1\pm\sqrt{3}$.

61. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^4-2x^3+3x^2-2x-3=0.$$

Megoldás. $(x^2-x+1)^2-4=0$ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

62. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^4+4x^3+2x^2-4x-3=0.$$

Megoldás. $(x^4-1)+4x(x^2-1)+2(x^2-1)=0, (x^2-1)(x^2+4x+3)=0$, $x=\pm1,-3$.

63. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$\frac{81^x-16^x}{54^x+24^x}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

64. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}+\sqrt{\frac{1}{4}+y^2}+\sqrt{1+z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+\frac{19}{8}.$$

65. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^2+2x+15=2x\cdot\sqrt{2x+15}.$$

66. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^3-2x^2-x-6=0.$$

Ötlet. Keressünk racionális gyököket, a gyöktényezőt emeljük ki.
Megoldás. $x=3$.

67. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^4+2x^3+x^2-8x-20=0.$$

68. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^4-2x^3-6x^2-7x-4=0.$$

69. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$4x^4-11x^2-9x-2=0.$$

Egyenletek megoldása helyettesítéssel

70. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(x^2+2x)^2-14x^2=15+28x.$$

71. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x-6=0.$$

72. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^2-5x+\sqrt{x^2-5x+15}=0.$$

73. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^3+3x^2+3x+\frac{1}{x^3+3x^2+3x+1}=\frac{57}{8}.$$

74. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$\frac{x^2-6}{x}+\frac{5x}{x^2-6}=6$$

75. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert
$$x+\sqrt{x+4y-2}=32-4y$$
$$x+2y^2-3y=42.$$

76. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szimmetrikus) egyenletet
$$2x^3+7x^2+7x+2=0.$$

Ötlet. $(x+1/x)^2=x^2+1/x^2+2$.

77. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szimmetrikus) egyenletet
$$2x^3-3x^2-3x+2=0.$$

Ötlet. $(x+1/x)^3=x^3+1/x^3+3(x+1/x)$.

78. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szimmetrikus) egyenletet
$$6x^3-7x^2-7x+6=0.$$

79. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szimmetrikus) egyenletet
$$6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0.$$

80. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$25x^4-135x^3+76x^2-135x+25=0.$$

81. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0.$$

82. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$3x^4-10x^3+6x^2-10x+3=0.$$

83. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0.$$

84. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0.$$

85. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$2x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 45x + 18 = 0.$$

Ötlet. x^2-tel osztva $y = x + 3/x$
Megoldás. $x = 1, 3, 2, 3/2$.

86. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^4 + 2x^3 - 34x^2 + 14x + 49 = 0.$$

87. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}} = \frac{5}{2}.$$

Ötlet.$a + 1/a$.

88. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{3x - 2 - 2x^2}{x} - 2.$$

89. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Megoldás. Próbáljuk felírni ezt a szimmetrikus negyedfokút két szimmetrikus másodfokú szorzataként

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = (2x^2 + ax + 2)(3x^2 + bx + 3)$$

alakban, innen $a = -5, b = 10$. Ekkor $x = 2, 1/2, -3, -1/3$.

90. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Megoldás. Próbáljuk felírni ezt a szimmetrikus negyedfokút két szimmetrikus másodfokú szorzataként

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$$

alakban, innen $a = 1, b = -3$. Ekkor $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$.

91. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0.$$

92. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0.$$

93. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3 = 0.$$

94. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (nem teljesen szimmetrikus) egyenletet

$$5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0.$$

Megoldás. $x = \pm 1$ gyöke ezért $x^2 - 1$ kiemelhető. $x = \pm 1, 5, 1/5$.

95. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (nem teljesen szimmetrikus) egyenletet
$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0.$$

96. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (nem teljesen szimmetrikus) egyenletet
$$3x^4 - 4x^3 + 4x - 3 = 0.$$

97. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szintén nem teljesen szimmetrikus) egyenletet
$$x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0.$$

Megoldás. $x = y - 1/y$ helyettesítés segít. $x = (1 \pm \sqrt{5})/2, 1 \pm \sqrt{2}$.

98. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szintén nem teljesen szimmetrikus) egyenletet
$$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0.$$

99. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szintén nem teljesen szimmetrikus) egyenletet
$$5x^4 - 16x^3 + 2x^2 + 16x + 5 = 0.$$

100. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szimmetrikus) egyenletet
$$5x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Megoldás. $x = -1$ gyöke, a maradékot két másodfokú szimmetrikus szorzataként írjuk $x = -1$.

101. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szimmetrikus) egyenletet
$$6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0.$$

102. Feladat. Oldjuk meg az alábbi (szimmetrikus) egyenletet
$$6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6 = 0.$$

103. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(x-2)^2(x+1)^2 - (x-2)(x^2-1) - 2(x-1)^2 = 0.$$

Megoldás. $(x-1)^2$-gyel osztunk, majd $y = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-1}$ helyettesítéssel $x = 0, 3, \pm\sqrt{3}$.

104. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$\frac{6}{2x^2 - 6x + 1} + 9x = 3x^2 + 4.$$

105. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2} = \frac{13}{5} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{x}\right)$$

106. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(x^2 + 6x)^2 - 63 = (x+3)^2.$$

107. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55.$$

108. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(x-1)(x-3)(x-6)(x-8) = 144.$$

Megoldás. $1 + 8 = 3 + 6$, $y = x^2 - 9x + 8$, $x = 0, 9$.

109. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 120.$$

110. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19.$$

111. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) + 24 = 0.$$

112. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 82.$$

Megoldás. $y = x + 4$, $x = -2, -6$.

113. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x - 1)^4 + (x + 5)^4 = 162.$$

114. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 = 0.$$

115. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)^2(x + 4)(x + 5) = 360.$$

116. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x + 1)(2x + 1)(4x + 3)^2 = 9.$$

Megoldás. Megfelelő csoportosítással $y = 2x^2 + 3x + 1$ helyettesítéssel $x = -3/2; 0$.

117. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x^2 - x - 30)^2 - 3x(x - 1) + 90 = 0.$$

118. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + \ldots + (x + 2001)^2 = 667\ 675\ 004.$$

Megoldás. $x = y - 1001$, $2001y^2 + 2(1^2 + 2^2 + \ldots + 1000^2) = 667\ 675\ 004$. Összegezve $x = -999, -1003$ adódik.

119. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x^2 - 4)^2 - 8 \cdot (x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) + 12 \cdot (x^2 - 9)^2 = 0.$$

120. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}.$$

Megoldás. A baloldalon egyszerűsítünk x-szel és $y = x + 1 + \dfrac{3}{x}$ az új ismeretlen, $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

121. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$$

122. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 6 = 0.$$

123. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$2x + \frac{1}{x^3} = 3 \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{x^4}}.$$

Megoldás.

- Meghatározzuk az értelmezési tartományt.
- Szorzunk x-szel: $2x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 3 \cdot \sqrt{2x^2 - \dfrac{1}{x^2}}$.
- Négyzetre emelünk, $y = 2x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ helyettesítéssel élve $x = 1, \sqrt{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}}$.

124. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(x^2 + 9x - 7)^3 + (2x^2 - 7x + 6)^3 = (3x^2 + 2x - 1)^3.$$

Megoldás.

- A baloldali két alap összege épp a jobboldali alap.
- Így $a = x^2 + 9x - 7$, $b = 2x^2 - 7x + 6$ helyettesítéssel $a^3 + b^3 = (a+b)^3$ alakú.
- Ez $3ab(a+b) = 0$.

125. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(x^2 - 3x + 2)^3 + (x^2 - 5x - 6)^3 = 8(x^2 - 4x - 2)^3.$$

Megoldás.

- A baloldali két alap összege épp a jobboldali alap.
- Így $a = x^2 - 3x + 2$, $b = x^2 - 5x - 6$ helyettesítéssel $a^3 + b^3 = (a+b)^3$ alakú.
- Ez $3ab(a+b) = 0$. $x = 1, 2, 6, -1, 2 \pm \sqrt{6}$.

126. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(x^2 - 5x + 4)^2 + (x^2 - 7x + 10)^2 = 4(x-3)^2.$$

127. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$6\sin^2 x - \sqrt{27}\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

128. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 1,5.$$

Megoldás.$1,5 = 1,5(\sin^2 x + \cos^2 x)$ alkalmazásával tg x-ben másodfokú.

129. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$$

130. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 34$$

Megoldás. Az alapok egymás reciprokai, így pl. $(3 - 2\sqrt{2})^x = a$ helyettesítéssel $x = \pm 2$.

131. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet
$$(3 - 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 6.$$

132. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(4-\sqrt{15})^x + (4+\sqrt{15})^x = 8$$

133. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(3-2\sqrt{2})^x + (3+2\sqrt{2})^x = 6^x$$

Megoldás. Osztunk 6^x-nel

$$\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\right)^x + \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{6}\right)^x = 1$$

$x = 1$. A baloldal két szigorúan monoton csökkenő függvény összege, így maga is szigorúan monoton csökkenő, így legfeljebb csak egy megoldás lehet ami az $x = 1$.

134. Feladat. A p paraméter mely értékeire lesz az alábbi egyenletnek

$$4 \cdot 2^x + 9 \cdot 5^x = p \cdot 10^{\frac{x}{2}}$$

pontosan egy megoldása?

135. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^7 - 4x^6 + 8x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Ötlet. $x = -1$ megoldás, $(x+1)$ kiemelhető, majd szimmetrikus.

136. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^{12} - 5x^8 - 9x^4 + 45 = 0.$$

137. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y) = \frac{16}{3},$$
$$x^2y + xy^2 = 12$$

Megoldás. Az egyenletrendszer szimmetrikus, segít az $x+y = a, xy = b$ helyettesítés. Ekkor $a = 3, b = 4$ így $x = 3, y = 1$ illetve $x = 1, y = 3$.

138. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$3x + xy + 3y = 1,$$
$$x^2y + xy^2 = 6$$

139. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$2x + 2y = xy,$$
$$xy + yz + zx = 108,$$
$$xyz = 180.$$

140. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$x^3y + xy^3 = 78,$$
$$x^4 + y^4 = 97$$

141. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$x + y = 6,$$
$$x^4 + y^4 = 34xy$$

142. Feladat*. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok körében

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1.$$

«NMMV 2006. 10. osztály 1. feladat»

143. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x^2+3x-4)^3 + (2x^2-5x+3)^3 = (3x^2-2x-1)^3.$$

« NMMV 1993. 12. osztály 4. feladat»

144. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$2(x^2+x+1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3-1).$$

145. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$3x^2 - 2xy - y^2 = 0,$$
$$x^2 + 5y = 6.$$

146. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$2 \cdot \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}.$$

147. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$6 \cdot \sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5 \cdot \sqrt[6]{(x-3)(x-2)}.$$

148. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$2 \cdot (x^2+2) = 5 \cdot \sqrt{x^2+1}.$$

149. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{(34-x) \cdot \sqrt[3]{x+1} - (x+1) \cdot \sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x} - \sqrt[3]{x+1}} = 30.$$

150. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x.$$

Megoldás.$t = (2/7)^x$, $x = \log_{\frac{2}{7}} 3$.

151. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$2^{x-y} - 3 \cdot 2^x + 2^{x+y+2} = 2,$$
$$2^{x-y+1} - 2^x - 5 \cdot 2^{x+y} = 1.$$

Megoldás. Az első egyenletet 2-vel osztjuk, a baloldalakat egyenlővé tesszük, átrendezzük

$$14 \cdot 2^{x+y} - 2^x - 3 \cdot 2^{x-y} = 0.$$

Ekkor 2^{x-y}-nal osztunk, majd $14t^2 - t - 3 = 0$, $x = 1, y = -1$.

152. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$x^2 + y^2 = 10,$$
$$2x^2 + 3y^2 - xy = 18.$$

Megoldás. Mindkét egyenlet minden tagja másodfokú, ilyenkor célszerű a konstans tagokat eltüntetni, majd x/y-ban másodfokú egyenletet kapunk $(\pm 3, \pm 1), (\pm\sqrt{8}, \pm\sqrt{2})$.

153. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$x^2+y^2=4,$$
$$x^3y-xy^3=\sqrt{12}.$$

154. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}=\frac{35}{12}}.$$

Megoldás.Látható, hogy $x>1$, legyen $x=\frac{1}{\sin\alpha}$, α hegyesszög. Ekkor az egyenlet

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{35}{12}.$$

Ekkor $a=\sin\alpha+\cos\alpha$, és $b=\sin\alpha\cos\alpha$ helyettesítéssel, $12a=35b$, de tudjuk, hogy $a^2-1=2b$, és így $a=7/5, b=12/25$. Innen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ a $t^2-7/5t+12/25=0$ egyenlet megoldásai, $t=3/5, 4/5$, $x=5/3, 5/4$.

155. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4\sin^3 x=\sin x+\cos x.$$

Megoldás.$\sin x+\cos x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^3 x+\cos^3 x+\sin x\cos^2 x+\sin^2 x\cos x$, így $\cos^3 x$-szel osztva, $\mathrm{tg}x=a$, helyettesítéssel $3a^3=1+a+a^2$, $(a-1)(3a^2+2a+1)=0$, $a=\mathrm{tg}x=1$.

156. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet, ha $a>1$ valós paraméter

$$10\cdot a^{7x+4}-\sqrt{121\cdot a^{12x+8}}+a^{5x+4}=0.$$

Ötlet. Osszunk a^{5x+4}-nel.

157. Feladat. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletnek pontosan p számú megoldása legyen

$$\sqrt{x^4-6x^2+9}=p.$$

158. Feladat. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a

$$2x^2-2(2p+1)x+p(p+1)=0$$

egyenletnek egy p-nél kisebb, és egy p-nél nagyobb gyöke legyen.

159. Feladat*. Határozzuk meg, mely c paraméterek esetén van megoldása a $x^2+2xy=c$ egyenletnek, ha $x^2+y^2=1$. (Próbálkozzunk trigonometrikus helyettesítéssel.)

«KöMaL F. 3282»

160. Feladat*. Tegyük fel, hogy $a<b<c<d$ és $a+d\neq b+c$. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}-\frac{1}{c-x}+\frac{1}{d-x}=0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van, amelyek közül az egyik a (b,c) intervallumba, a másik pedig az (a,d) intervallumon kívül esik.

«KöMaL B. 4860»

161. Feladat*. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$$
$$\frac{1}{x+15}+\frac{1}{y-6}=\frac{1}{z}$$
$$\frac{1}{x+24}+\frac{1}{y-15}=\frac{1}{z}$$

egyenletrendszert.

«KöMaL C. 658.»

162. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sin x-\cos x=1$$

163. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$-\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$$

164. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}.$$

165. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x=1.$$

Ötlet. $\sin x+\cos x=t$

166. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}.$$

Ötlet. $\sin 2x=2\sin x\cos x$, valamint $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x=4\sin x\cos x\cos 2x$

«KöMaL C. 834»

167. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0.$$

Ötlet. Állítsuk elő az argumentumokat $5x-3x$ stb. alakban, majd használjunk addíciós tételeket.

168. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\sin^4 x+\sin^4 2x+\sin^4 3x=\cos^4 x+\cos^4 2x+\cos^4 3x.$$

169. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0.$$

170. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\sin 4x=1-2\sin^2 x.$$

Inverz, összetett függvény, monotonitás, ...

171. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$x^2 - 4 = \sqrt{x+4}.$$

«KöMaL F. 2603.»

172. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$x = \sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4x}}}.$$

Ötlet. Vegyük észre, hogy az $f(x) = \sqrt{-3+4x}$ függvény iteráltja szerepel a jobb oldalon.

«KöMaL F. 2740.»

173. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3.$$

174. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$13^{5-2x} = 5x + 3.$$

Ötlet. A baloldal sz.m.cs, max. egy megoldás van.

175. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{x} = x^2 - 3x + 1 + |x - 1|.$$

Ötlet. Az egyenlet $x + \sqrt{x} = (x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2}$. Mindkét oldal a szigorú monoton növő $f(x) = x + \sqrt{x}$ függvény egy-egy értéke.

176. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$2^{x^2 - x} = 1 - 2^{-x}(x^2 - x).$$

177. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$2^{x^2 - 3x} + \frac{x^2 - 3x}{2^x} = 1.$$

178. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} = \cos(2x).$$

179. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$x^2 - x - 1 = 2^x - \log_2(x^2 + 2^x).$$

180. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\log_2(x^2 + 4) + (x^2 + 4)^2 + (x^2 + 4) = \log_2(4x) + (4x)^2 + 4x.$$

—-

181. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\log_2(3x - 2) - \log_2(x + 2) = 2(2^{x+1} - 8^{x-1} - x + 2).$$

Egészrész, törtrész

182. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$[x+3]+[x-5]=8,$$

ahol $[a]$ az a szám egészrésze.

Ötlet. $[x]+3+[x]-5=8$

183. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$[x+1]+[x-2]-[x+3]=2.$$

184. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{x-1}{4}\right]=3.$$

Megoldás. $[13;17)$.

185. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{x+2}{3}\right]=5.$$

Megoldás. $[13;16)$.

186. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{3x+1}{2}\right]=x.$$

Megoldás. $[-1;1)$-ből az egészek, $x=-1,0$.

187. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{x-1}{3}\right]=\frac{x+1}{2}.$$

188. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$2\,[x]+4=3x.$$

Megoldás. $\dfrac{3x-4}{2}$ egész, $x=(2k+4)/3$. Ezt beírva, megoldva $x=4,10/3,8/3$.

189. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{x+1}{3}\right]=x-2.$$

190. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{x+10}{3}\right]=2x.$$

191. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left\{\frac{x+2}{3}\right\} = \frac{x-1}{12}.$$

Ötlet. Vezessük vissza egészrészre $\{x\} = x - [x]$ alapján.

192. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left\{\frac{2x+1}{3}\right\} = \frac{x-10}{6}.$$

193. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left\{\frac{x+1}{4}\right\} = \frac{2}{5}.$$

194. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left\{\frac{3x-1}{2}\right\} = \frac{1}{3}.$$

195. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$[x]^2 + 2x = 4.$$

196. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$[x]^2 + 3x = 2.$$

197. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[x^2 + x + 1\right] = x + 1.$$

Ötlet. Nem is kell az egészrész.

198. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$[x+1] + [x+2] + [x+3] + \ldots + [x+n] = n^2 \; n \in \mathbb{N}^+.$$

Megoldás. Az egészek kiszedhetők az egészrészből, $n\,[x] = \frac{n(n+1)}{2} = n^2$. Azaz $[x] = (n-1)/2$. Ha $n = 2k$ nincs megoldás, ha $n = 2k+1$ akkor $[k, k+1)$.

199. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}.$$

200. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = x.$$

Megoldás. Átrendezve $[x] \cdot \{x\} = 1$, ahonnan egyrészt $x > 1$, másrészt ha $[x] = n$, akkor $\{x\} = 1/n$ alakú, vagyis $x = n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}, n > 1$.

201. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$x^2 - 5[x] + 3 = 0.$$

Megoldás.

- $[x] = \dfrac{x^2+3}{5} \geq \dfrac{3}{5}$,
- Legyen $[x] = n$. Ekkor $0 = x^2 - 5[x] + 3 \geq n^2 - 5n + 3$, ahonnan $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \leq n \leq \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$, vagyis $n = 1, 2, 3, 4$.
- Ezeket külön-külön megvizsgáljuk, pl. $n = 1$ $x = 1+\alpha$ ($\alpha \in [0;1)$) és $(1+\alpha)^2 - 5 + 3 = 0$, ahonnan $\alpha = \sqrt{2} - 1$ $x = \sqrt{2}$.
- A többi esetre is végignézve, $x = \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{12}, \sqrt{17}$.

202. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{x-1}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{3}\right].$$

Megoldás.

- $\left[\dfrac{x-1}{2}\right] = \left[\dfrac{x+1}{3}\right] = k$
- Innen $2k+1 \leq x < 2k+3$, és $3k-1 < x < 3k+2$
- Meg kell határozni, mely k-kra van közös része a fenti intervallumoknak. Könnyebb az, amikor nincs, ehhez $2k+3 \leq 3k-1$ vagy $3k+2 \leq 2k+1$, ahonnan $k \geq 4$, $k \leq -1$ adódik, vagyis csak $k = 0, 1, 2, 3$ esetén van közös rész.
- Ezen k-ra vesszük az x-re vonatkozó intervallumok metszetét, és ebből: $x \in [1;2) \cup [3;7) \cup [8;9)$.

203. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[\frac{x+1}{4}\right].$$

204. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet

$$\left[\frac{x+1}{2}\right] = \left[\frac{2x+1}{3}\right].$$

205. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$\left[\frac{2017}{x}\right] + \left[\frac{2018}{x+1}\right] = 230,$$

ahol $[a]$ az a szám egészrésze.

«KöMaL C. 1448.»

206. Feladat. Oldjuk meg az

$$[x]^2 + \{x\}^2 + x^2 + 2[x]\cdot\{x\} = 4x - 2x[x] - 2x\{x\} - 1$$

egyenletet, ahol $[x]$ az x szám egészrészét, $\{x\}$ pedig az x szám törtrészét jelenti.

«KöMaL C. 1368.»

207. Feladat*. Oldjuk meg az

$$x^2 - 6\{x\}^2 + 1 = 0.$$

egyenletet, ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelenti.

«KöMaL B. 4796.»

208. Feladat*. Oldjuk meg az

$$\{x\} = \left\{x^2\right\} = \left\{x^3\right\}.$$

egyenletrendszert, ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelenti.

«KöMaL B. 4385.»

209. Feladat*. Oldjuk meg a $10x - 5 = 9[x]$ egyenletet a valós számok halmazán (ahol $[x]$ az x egész részét jelenti).

«KöMaL C. 955.»

210. Feladat*. Oldjuk meg az

$$\{3x\}^2 + \{x\}^2 = 1.$$

egyenletet, ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelenti.

«KöMaL C. 808.»

211. Feladat*. Hány megoldása van az

$$\left[\frac{x}{10}\right] = \left[\frac{x}{11}\right] + 1$$

egyenletnek az egész számok körében?

«KöMaL C. 730.»

212. Feladat*. Oldjuk meg az alábbi egyenletet.

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}}.$$

«KöMaL C. 605.»

213. Feladat*. Igazoljuk, hogy az

$$\{x\} + \left\{x^2\right\} = 1$$

egyenletnek nincs racionális megoldása.

«KöMaL Gy. 2462.»

214. Feladat. Az a paraméter mely értékeire lesz az

$$|2\{x\} - 1| = ax$$

egyenletnek négy megoldása?

Ötlet. Ábrázoljuk az egyenlet bal oldalát.

«KöMaL Gy. 2462.»

További feladatok - régi és új módszerek

215. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x^2 + y^4 + 1 = x + y^2 + xy^2.$$

Ötlet. y^2-ben másodfokú.

216. Feladat*. Oldjuk meg az

$$1^k + 9^k + 10^k = 5^k + 6^k + 11^k$$

egyenletet a természetes számok halmazán.

«KöMaL F. 3143.»

217. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\log_2 x = 3 - x.$$

218. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\log_2(x+1) = \log_{\frac{1}{3}} x + 3.$$

219. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4^x + (x-1) \cdot 2^x = 6 - 2x.$$

Ötlet. 2^x-ben másodfokú egyenlet

220. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$2^{2x+1} - 2^x = 2x^2 + 3x + 1.$$

221. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(x+1) \cdot 9^{x-3} + 4x \cdot 3^{x-3} - 16 = 0.$$

222. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$3^{2x+1} - x \cdot 3^{x+1} - 3^x - 6x^2 - 7x - 2 = 0.$$

223. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$x - 2 = (1-x) \cdot 2^{x-1} - 4^{x-1}.$$

224. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\sqrt{1+3x} = x + \sqrt{1-3x}.$$

225. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{x-29}{1970} + \frac{x-27}{1972} + \frac{x-25}{1974} + \frac{x-23}{1976} + \frac{x-21}{1978} + \frac{x-19}{1980} =$$
$$= \frac{x-1970}{29} + \frac{x-1972}{27} + \frac{x-1974}{25} + \frac{x-1976}{23} + \frac{x-1978}{21} + \frac{x-1980}{19}.$$

Ötlet. Minden törtből 1-et kivonva a számlálók $x - 1999$ lesznek.

226. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-2}{x+2} = x + \frac{x-4}{x+4} + \frac{x-5}{x+5}.$$

Megoldás. Minden törthöz 1-et adunk, a számlálók $2x$-ek lesznek, 0-ra redukálunk, x kiemelhető a maradék egyenletben a tagokat jól csoportosítjuk

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{2}.$$

Innen közös nevezőre hozunk az első kettőben és a második kettőben is majd $y=x^2+6x$ helyettesítéssel y-ban másodfokú egyenlet lesz, ahonnan $x=-3\pm\sqrt{\frac{17\pm\sqrt{176}}{2}}$.

227. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x-4}+\frac{5}{x-5}=x^2-3x-4.$$

228. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{2x-2}{1998}+\frac{2x-1}{1999}+\frac{2x}{2000}+\frac{2x+1}{2001}+\frac{2x+2}{2002}=5.$$

229. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\ldots+\frac{x+n}{n+1}=n,\ n\in\mathbb{N}^+.$$

230. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=100,\ n\in\mathbb{N}^+.$$

Megoldás. Nevezőket racionalizáljuk, $x=10200$.

231. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$5^{3x+2}=7^{x+\frac{2}{3}}$$

232. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4^x+6^x-9^x=3^{2x}.$$

233. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$9^x-25\cdot 12^{x-1}+16^x=0.$$

234. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$(3-2\sqrt{2})^x+1=6(\sqrt{2}-1)^x$$

235. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

236. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x=194.$$

237. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4^x - 3^x = \sqrt{12^x - 9^x}.$$

238. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$4 \cdot \log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 4.$$

239. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$\log_2^2 x - 20 \cdot \log_4 x + 29 = \frac{11}{\log_4^2 x - 5 \cdot \log_4 x + 9}.$$

240. Feladat. Oldjuk meg az $x^6 - 6x + 5 = 0$ egyenletet.

«KöMaL B. 4057.»

241. Feladat. Oldjuk meg a pozitív számok körében az

$$\frac{x \cdot 2014^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot 2014^x}{2} = 2014.$$

egyenletet.

«KöMaL B. 4606»

242. Feladat. Oldjuk meg az

$$2^{\log_3 x} + 3^{\log_x 2} = 4$$

egyenletet, ha $x > 1$.