Elemi matematika 3. - MTN424g

Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték feladatok

A korábbi fejezetekben már találkoztunk geometriai egyenlőtlenségekkel, és szélsőérték feladatokkal:

Számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség két tagra:

1. Feladat. 200 méter hosszú kerítéssel szeretnénk egy épület fala mentén három oldalról körbekeríteni egy téglalap alakú részt. Mekkorának válasszuk az oldalait, hogy területe a lehető legnagyobb legyen?

2. Feladat. Határozzuk meg adott kerületű téglalapok közül a maximális területűt, illetve adott területű téglalapok közül a minimális kerületűt.

3. Feladat. Írjunk adott körbe maximális területű téglalapot.

4. Feladat. Adott felszínű téglatestek közül melyik testátlója minimális?

5. Feladat. Egy téglatest egyik lapjának területe 1 dm^2, az élek hosszának összege 20 dm. Mekkora ezen téglatestek felszínének maximuma?

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel élve $a = \sqrt{bc}$, akkor $\alpha \leq 60°$.

7. Feladat. Egy háromszögbe négyzetet írtunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög egyik oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalán van. Igazoljuk, hogy a négyzet területe legfeljebb a háromszög területének fele.

8. Feladat. Mekkorák a 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszögbe írható legnagyobb területű téglalap oldalai?

9. Feladat. Egy háromszög egyik oldala 1, másik két oldala hosszának összege állandó. Határozzuk meg a háromszög beírt és köré írt köre területe szorzatának legnagyobb értékét!

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig az átfogójának a hossza, akkor

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab(a+b+c)} \geq \sqrt{2}.$$

11. Feladat. Egy trapéz egyik alapja 12 cm, a másik alap és a trapéz magasságának összege 30 cm. Hogyan kell megválasztani a trapéz magasságát, hogy területe maximális legyen?

12. Feladat. Egy körcikk területe 16. Mekkora a sugara, ha kerülete minimális?

13. Feladat. Adott kerületű negyed-körgyűrűcikkek közül melyiknek a területe maximális?

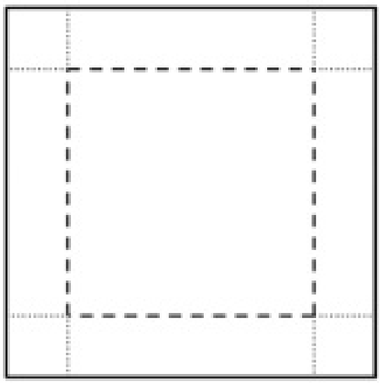
Számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség n tagra:

14. Feladat. Írjunk adott gömbbe maximális térfogatú hengert.

15. Feladat. Adott kerületű háromszögek közül melyik területe maximális?

16. Feladat. Egy gyárban a gyártási folyamat során egy a oldalhosszúságú négyzet alakú fémlemez minden sarkából eltávolítanak egy-egy, egymással egybevágó négyzet alakú részt, az ábra szerint. Ezek után a szaggatott vonalak mentén a lapokat felhajtják, s élük mentén összeforrasztják őket, így egy felül nyitott, téglatest alakú dobozt képezve.

Mekkora az a értéke, ha az ezen eljárással készíthető maximális térfogatú doboz térfogata 1024 cm^3?



17. Feladat. Adott térfogatú, felül nyitott hengerek közül melyiknek a legkisebb a felszíne? És ha nem nyitott felül?

18. Feladat. Adott felszínű, felül nyitott téglatest alakú dobozok közül melyiknek térfogata maximális?

19. Feladat. Egy üzemben 4000 cm^3 térfogatú felül nyitott, négyzetes alapú egyenes hasáb alakú edényeket gyártanak. Melyiknek minimális a felszíne?

«Emelt szintű érettségi feladat 2012. október 7. feladat»

20. Feladat. Egy egyenes körhenger tengelymetszetének kerülete 6 m. Mekkorák a maximális térfogatúnak a méretei?

Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenség két tagra:

21. Feladat. Tudjuk, hogy a háromszög A csúcsából húzott magassága harmonikus közepe annak a két szakasznak, amelyekre a magasság a BC oldalt bontja. Mekkora $\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma$?

22. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a < \frac{b+c}{2}$, akkor $s_a > \frac{s_b+s_c}{2}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

23. Feladat. Az ABC derékszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel élve határozzuk meg

$$\frac{s_a + s_b}{s_c}$$

maximumát.

Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenség n tagra:

24. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói $a, b, \in \mathbb{Z}$, és az átfogóhoz tartozó magassága m, akkor

$$m \leq \frac{\sqrt[a+b]{a^a \cdot b^b}}{\sqrt{2}}.$$

25. Feladat. Egy egység oldalú szabályos n-szög egy P belső pontja a sokszög oldalaitól rendre $d_1, d_2, \ldots, d_n$ távolságra van. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} > 2\pi.$$

26. Feladat. Határozzuk meg az 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyben minimális az oldalakra írható négyzetek területének összege.

27. Feladat. Határozzuk meg a $d = 2\cdot\sqrt{3}$ testátlójú téglatestek közül a maximális térfogatút.

28. Feladat. Adott élösszegű téglatestek közül melyiknek a
(a) térfogata,
(b) felszíne
a legnagyobb?

Megjegyzés: Forgassuk a Wikipédia *List os triangle inequalities* oldalát.

JENSEN-EGYENLŐTLENSÉG:

29. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve
$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}.$$

30. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve
$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge 2\cdot\sqrt{3}.$$

31. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}.$$

32. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc.$$

33. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve
$$\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2-b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}\ge 3.$$

34. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve
$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\ge 1.$$

35. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely hegyesszögű háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve
$$\mathrm{tg}^n\alpha+\mathrm{tg}^n\beta+\mathrm{tg}^n\gamma\ge 3\cdot\sqrt{3^n},\quad n\in\mathbb{N}^+.$$

36. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ egy konvex n-szög szögei, akkor
$$\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n<\left(\frac{2\pi}{n}\right)^n.$$

37. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve
$$k\ge 2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3}\cdot t}.$$

38. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve (r_a, r_b, r_c a hozzáírt körök sugarai)
$$r_a+r_b+r_c\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot k.$$

39. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve (R a köré írt kör sugara)
$$k\le 3\cdot\sqrt{3}\cdot R.$$

40. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$t \leq \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot R^2.$$

41. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$4t \leq \sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

TOVÁBBI FELADATOK:

42. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága nem hosszabb, mint a hozzá tartozó oldal bármely belső pontjának a másik két oldaltól vett távolságösszege. (Varga Tamás Matematikaverseny, 2009. megyei)

Ötlet. A leghosszabb oldal egy belő pontját kössük össze a szemközti csúccsal. Dolgozzunk az így keletkező háromszögek területeivel.

43. Feladat*. Adott hegyesszögű háromszögbe írjunk minimális kerületű háromszöget! (Fagnano, 1775)

Ötlet. Egy tetszőleges UVW beírt háromszögből kiindulva (U az $a-n$ van stb.), tükrözzük U-t BA-ra és BC-re. Ekkor $UW = WU_1, UV = VU_2$, vagyis UVW kerülete az U_1WVU_2 töröttvonal hossza, ami akkor minimális, ha ... . Ezután már csak az kell, mikor minimális U_1U_2 hossza. Esetleg járjunk utána Fejér Lipót bizonyításának, pl. a Polygon Matematikai problémakalauzában.

44. Feladat*. Adott hegyesszögű háromszögben keressük meg azt a pontot, amelyre a csúcsoktól vett távolságösszeg minimális! (Fermat-pont, izogonális pont)

Ötlet. Legyen P egy tetszőleges belső pont. Forgassuk el a háromszöget pl. az A csúcsa körül 60°-kal. Vegyük észre, hogy $PA + PB + PC = PP' + BP + C'P' =$ a $C'B$ töröttvonal hosszával, amely akkor a legrövidebb, ha egyenes.

45. Feladat. Egy téglatest térfogata 8 cm^3. Minden élét 1 cm-rel növelve, a keletkező téglatest térfogata 27 cm^3 lesz. Mekkora lesz a térfogata, ha ismét megnöveljük az éleit 1-1 cm-rel?

Ötlet. Használjuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget előbb $a; b; c$-re, majd $ab; bc; ca$-ra.

HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG:

46. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromszög bármely oldalának hossza kisebb, mint a kerület fele.

47. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalának hossza kisebb, mint az őt közrefogó oldalak hosszának számtani közepe.

Ötlet. Használjuk, hogy $s_a = \sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}$.

48. Feladat*. Egy háromszögben $ab + bc + ca = 12$. Milyen határok közé esik a kerülete?

Ötlet. A minimum adódik az oldalakra felírt számtani-négyzetes közé közötti egyenlőtlenségből. A felső becslésnél használjuk pl. az $a < b+c$-ből következő $a^2 < ab+ac < ab+bc+ca = 12$ eredményt. Keressünk jobb becslést is, lássuk be, hogy $k < \sqrt{48}$.

49. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{3}{4}k < s_a + s_b + s_c < \frac{3}{2}k.$$

50. Feladat. Igazoljuk, hogy a, b, c pontosan akkor egy háromszög oldalai, ha bármely $p+q = 1$ számokra $pa^2 + qb^2 > pqc^2$.

Ötlet. Vizsgáljuk a diszkriminánst.

Nevezetes közepek (ismét):

51. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely a, b befogójú derékszögű háromszögben $a + b \leq \sqrt{2}c$.

Ötlet. Használjuk a számtani-négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget.

52. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$f_\gamma \leq \sqrt{ab}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ötlet. Kétszeres szögekre vonatkozó szinuszos addíciós tétel.

53. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$f_\gamma \leq \sqrt{s(s-c)}.$$

Ötlet. Koszinusztétel, kétszeres szögekre vonatkozó koszinuszos addíciós tétel.

54. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 \geq s^2.$$

Ötlet. Használjuk, hogy $s_a = \sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}$.

55. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq s^2.$$

Ötlet. Lássuk be, hogy a következő egyenlőtlenségből ez következik.

56. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$f_\alpha^2 + f_\beta^2 + f_\gamma^2 \leq s^2.$$

Ötlet. Használjuk a **53. Feladat** eredményét.

57. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$m_a + m_b + m_c \geq 9r.$$

Ötlet. Lássuk be, hogy $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} = \frac{1}{r}$, majd alkalmazzuk a számtani-harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget.

58. Feladat. Igazoljuk, hogy a háromszög pontosan akkor szabályos ha

$$m_a c + m_b a + m_c b = 6t.$$

59. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$r_a + r_b + r_c \geq 9r.$$

Ötlet. Lássuk be, majd használjuk, hogy $rs = r_a(s-a)$.

60. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben (s a félkerület)

$$2s^2 \geq 27Rr.$$

61. Feladat. Legyenek az ABC háromszög belső szögfelezőinek a háromszögbe eső szakaszainak hosszai rendre x, y, z. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ötlet. Gondoljunk a szögfelező tétel bizonyításának módszerére.

62. Feladat*. Adott kör köré írható háromszögek közül határozzuk meg a minimális

(a) területűt,
(b) kerületűt.

63. Feladat*. Igazoljuk, hogy adott kör köré írható háromszögek közül a szabályos háromszög esetén minimális az $OA^2 + OB^2 + OC^2$ érték, ahol O a kör középpontja.

Ötlet. Igazoljuk, és használjuk, hogy $OA + OB + OC \geq 6r$ (r a beírt kör sugara.)

64. Feladat*. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög egy P belső pontjának a háromszög csúcsaitól vett távolsága rendre p, q, r, míg az oldalaktól vett távolsága rendre x, y, z. Igazoljuk, hogy $pqr \geq 8xyz$.

Sugáregyenlőtlenség és néhány következménye:

65. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben $R \geq 2r$, és egyenlőség pontosan akkor van, ha a háromszög szabályos. (Sugáregyenlőtlenség.)

Ötlet. Használjuk a **37. Feladat** és a **39. Feladat** eredményét.

66. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Ötlet. Dolgozzunk a köré írt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összegének négyzetével.

67. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Ötlet. Használjuk a koszinusztételt és a Héron-képletet is.

68. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leq \frac{1}{8}.$$

Ötlet. Használjuk sz-m egyenlőtlenséget és az előző feladat eredményét.

69. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} \geq 4.$$

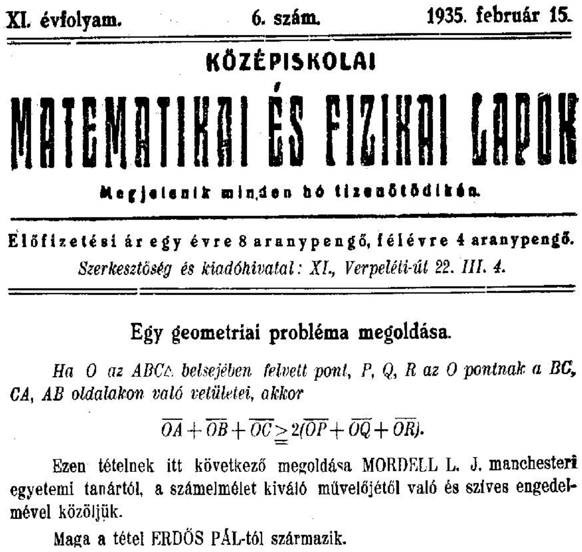
Ötlet. Kétszeres szögekre vonatkozó koszinuszos addíciós tétel, sz-h egyenlőtlenség.

70. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$s \geq 3\sqrt{3}r.$$

Erdős-Mordell egyenlőtlenség

71. Feladat*. Legyen az ABC háromszög egy P belső pontjának a háromszög csúcsaitól vett távolsága rendre p, q, r, míg az oldalaktól vett távolsága rendre x, y, z. Igazoljuk, hogy $p+q+r \geq 2(x+y+z)$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha P a szabályos háromszög középpontja.



XI. évfolyam. 6. szám. 1935. február 15.

KÖZÉPISKOLAI

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Megjelenik minden hó tizenötödikén.

Előfizetési ár egy évre 8 aranypengő, félévre 4 aranypengő.

Szerkesztőség és kiadóhivatal: XI., Verpeléti-út 22. III. 4.

Egy geometriai probléma megoldása.

Ha O az ABC△ belsejében felvett pont, P, Q, R az O pontnak a BC, CA, AB oldalakon való vetületei, akkor

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} \geqq 2(\overline{OP}+\overline{OQ}+\overline{OR}).$$

Ezen tételnek itt következő megoldása MORDELL L. J. manchesteri egyetemi tanártól, a számelmélet kiváló művelőjétől való és szíves engedelmével közöljük.

Maga a tétel ERDŐS PÁL-tól származik.

72. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben (r a beírt kör sugara, p, q, r' pedig az Erdős-Mordell tételben p, q, r-ként szereplő távolságok)

$$6r \leq p + q + r'.$$

Ötlet. Használjuk, hogy bármely háromszögben $m_a + m_b + m_c \geq 9r$.

73. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6.$$

Ötlet. Használjuk E-M-t a beírt kör középpontjára.

További feladat(ok)

74. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben fennáll az $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}t$, Weitzenböck-egyenlőtlenség (1919) Hadwiger-Finsler-féle élesítése (1937):

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\sqrt{3}t.$$