Elemi matematika 3. - MTN424g

A JENSEN-EGYENLŐTLENSÉG

Definíció: Az $f(x)$ függvény konvex/konkáv $[a;b] \subset D_f$-en, ha ezen az intervallumon bármely ívének minden pontja a az ív végpontjait összekötő húr alatt/felett; vagy magán a húron van. Szigorú konvex/konkáv esetről akkor beszélünk, ha a végpontok kivételével minden pont a húr alatt/felett van.

Jensen-egyenlőtlenség: Az $f(x)$ függvény pontosan akkor konvex $[a;b] \subset D_f$-en, ha bármely $x_1, x_2 \in [a;b]$ esetén

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Megjegyzés:

(a) Szigorú konvex esetben szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

(b) Konkáv esetben az egyenlőtlenség fordított.

Az egyenlőtlenség néhány változata (konvex esetre):

(a) Kéttagú szimmetrikus:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

(b) n-tagú szimmetrikus:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

(c) n-tagú súlyozott: legyen $q_1+q_2+\ldots+q_n = 1$:

$$f(q_1x_1+\ldots+q_nx_n) \le q_1 \cdot f(x_1)+\ldots+q_n \cdot f(x_n).$$

1. Feladat. Igazoljuk hogy $\ln x$ szigorúan konkáv.

Ötlet. Használjuk a sz-m közép közötti egyenlőtlenséget.

2. Feladat. Az $f(x) = x^2$ függvény konvexitását használva vezessük le két tagra a számtani-négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget.

3. Feladat. Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény konkávitását használva vezessük le két tagra a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

4. Feladat. A pozitív számokon értelmezett $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény konvexitását használva vezessük le két tagra a számtani-harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget.

5. Feladat*. Igazoljuk, hogy $\sin x$ a $[0;\pi]$-n szigorúan konkáv.

GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉGEK ÉS SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK

6. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Ötlet. Használjuk a sz-m közép közötti egyenlőtlenséget, majd a Jensen-t.

7. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \ge 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Ötlet. Használjuk a sz-h közép közötti egyenlőtlenséget, majd a Jensen-t.

8. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Ötlet. Vizsgáljuk külön a hegyesszögű / nem hegyesszögű esetet, az előbbi egyszerű, az utóbbinál használjuk ki, hogy van két szög, melyek összege hegyes. Itt szükség lehet pl. a $\cos 2x = 2\cdot\cos^2 x - 1$ összefüggésre is.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Ötlet. Használjuk a koszinusztételt.

10. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\frac{bc}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca}{c^2+a^2-b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2-c^2} \geq 3.$$

Ötlet. Használjuk a koszinusztételt, és a h-sz egyenlőtlenséget.

11. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geq 1.$$

Ötlet. Használjuk a sz-n egyenlőtlenséget.

12. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely hegyesszögű háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\mathrm{tg}^n\alpha + \mathrm{tg}^n\beta + \mathrm{tg}^n\gamma \geq 3\cdot\sqrt{3^n}, \quad n\in\mathbb{N}^+.$$

Ötlet. Használjuk a sz-m közép közötti egyenlőtlenséget, valamint azt, hogy egy hegyesszögű háromszög szögeire $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$, a Jensen-t, majd az n-edik hatványközép-számtani közép közötti egyenlőtlenséget.

13. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ egy konvex n-szög szögei, akkor

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n < \left(\frac{2\pi}{n}\right)^n.$$

Ötlet. Használjuk, hogy jelen feltételek mellett $\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n < \left(\frac{2\pi}{n}\right)^n$, ennek bizonyítása szorgalmi feladat.

14. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$k \geq 2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3}\cdot t}.$$

Ötlet. Használjuk a rendezési-tételt, a szinuszos területképletet, a sz-h egyenlőtlenséget $\left(\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\sin\beta}, \frac{1}{\sin\gamma}\right)$-ra, majd a Jensent.

15. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve (R a köré írt kör sugara)

$$k \leq 3\cdot\sqrt{3}\cdot R.$$

Ötlet. $a = 2R\sin\alpha$.

16. Feladat. Az előző két feladat eredményéből vezessük le a sugáregyenlőtlenséget: Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve $R \geq 2 \cdot r$.

17. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve (r_a, r_b, r_c a hozzáírt körök sugarai)

$$r_a + r_b + r_c \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k.$$

Ötlet. Vezessük le, hogy a hozzáírt körök oldalegyenesen lévő érintési pontjai a távolabbi csúcstól épp félkerületnyi távolságban vannak. A sugarakról térjünk át a félszögek tangenseire, majd Jensen tangensre.

18. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$t \leq \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot R^2.$$

Ötlet. Használjuk a $t = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ összefüggést, a sz-m egyenlőtlenséget, és a Jensen-t.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{3}R.$$

20. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben, a szokásos jelölésekkel élve

$$4t \leq \sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Ötlet. Használjuk a $T = \frac{abc}{4R}$ összefüggést, a sz-m egyenlőtlenséget és az előző feladat eredményét.