Elemi matematika 3. - MTN424g
A CAUCHY-SCHWARZ-BUNYAKOVSZKIJ EGYENLŐTLENSÉG

1. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

2. Feladat. Igazoljuk, hogy
(a) $4a + 3b \le 5\sqrt{a^2 + b^2}$,
(b) $4a + 3b \le \sqrt{a^2 + 9} \cdot \sqrt{b^2 + 16}$,
(c) $\sqrt{7a+1} + \sqrt{7b+1} \le 3 \cdot \sqrt{2}$, ha $a + b = 1, 7a + 1, 7b + 1 \ge 0$.
Találjunk ki hasonló feladatokat!

3. Feladat. Határozzuk meg a $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ kifejezés minimumát, ha $a + b = 7, a, b, \in \mathbb{R}^+$.

Ötlet. CSB $\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, \sqrt{\frac{3}{b}}\right), \left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$-re.

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b pozitív és $a + b = 1$, akkor

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}.$$

Általánosítsunk!

Ötlet. Sz-N közép közötti egyenlőtlenség, majd CSB $\left(\sqrt{\frac{1}{a}}, \sqrt{\frac{1}{b}}\right), \left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$-re.

5. Feladat*. Igazoljuk, hogy

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

6. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha $n > 1, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\frac{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 4} + \ldots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c, d pozitív, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \ge \frac{64}{a + b + c + d}.$$

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív és $abc = 1$, akkor

$$a + b + c \le a^2 + b^2 + c^2.$$

Ötlet. CSB $(a; b; c), (1; 1; 1)$.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{3}{2}.$$

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, akkor $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \ge \frac{1}{n}$.

Ötlet. CSB $(a_1; a_2; \ldots; a_n), (1; 1; \ldots; 1)$.

11. Feladat. Igazoljuk, hogy $A_n \le Q_n$.

Ötlet. CSB $(a_1; a_2; \ldots; a_n), (1; 1; \ldots; 1)$.

12. Feladat*. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=11\\ \underline{x^2+2y^2+3z^2}&\underline{=66} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert.

13. Feladat. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z+4u&=60\\ \underline{x^2+y^2+z^2+u^2}&\underline{=120} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert.

Ötlet. CSB $(1;2;3;4),(x;y;z;u)$.

14. Feladat. Oldjuk meg a $\cos x\cdot\sin 7x+\cos 5x\cdot\sin x=\sqrt{2}$ egyenletet.

15. Feladat. Oldjuk meg az $x\cdot\sqrt{1-x}+\sqrt{3+x}=2\sqrt{x^2+1}$ egyenletet a pozitív számok halmazán.

A Bernoulli-egyenlőtlenség

16. Feladat*. Legyen $x\geq -1$ és $n\in\mathbb{N}^+$. Igazoljuk, hogy ekkor $(1+x)^n\geq 1+nx$, és ha $n>1$, akkor egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=0$.

17. Feladat*. Igazoljuk, hogy létezik olyan n természetes szám, amelyre $1,0001^n>n^{100}$.

18. Feladat. Igazoljuk, hogy $(1+\frac{1}{n})^n\geq 2$.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy $(1+\frac{1}{n})^n$ szigorú monoton nő.

20. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely pozitív természetes szám esetén $n^n\geq(n+1)^{n-1}$.

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a,b>0$ és $0<x<1$, akkor $(a+b)^x\cdot a^{1-x}<a+bx$.

22. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha $x,y,z>0$ és $xyz=1$, és $q\geq 1$, akkor

$$x^{\frac{1+q}{2}}+y^{\frac{1+q}{2}}+z^{\frac{1+q}{2}}\geq x+y+z.$$