Elemi matematika 3. - MTN424g

EGYENLŐTLENSÉGEK RENDEZÉSI TÉTELRE

Definíció: Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számsorozat azonosan rendezett/ellentétesen rendezett, ha minden $1 \le i, j \le n, i \ne j$-re $a_i \le a_j$-ből következik, hogy $b_i \le b_j / b_i \ge b_j$.

Tétel (Rendezési-tétel, Szűcs Adolf egyenlőtlenség): Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sorozatokra $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ egy permutációja, akkor $a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n$ akkor maximális/minimális ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $p_1, p_2, \ldots, p_n$ azonosan/ellentétesen rendezett.

1. Feladat. Igazoljuk a rendezési tételt.

Ötlet.

- Belátjuk, hogy van minimális.
- Kiindulunk egy nem ellentétesen rendezett permutációból, és belátjuk, hogy ha "lépünk egyet" az ellentétesen rendezettség felé, akkor az összeg nem nő.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Ötlet. Alkalmazzuk a rendezési tételt $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ azonosan rendezett sorozatokra.

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$xy + yz + zx \ge x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

Ötlet. Alkalmazzuk a rendezési tételt $(\sqrt{xy}, \sqrt{yz}, \sqrt{zx})$ és $(\sqrt{xy}, \sqrt{yz}, \sqrt{zx})$ azonosan rendezett sorozatokra.

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge x + y + z.$$

Ötlet. Alkalmazzuk a rendezési tételt az (xy, xz, zy), $\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right)$ azonosan rendezett sorozatokra.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a+b+c}{abc} \le \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ötlet.

- A baloldalt $\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}$ alakban írjuk.
- Alkalmazzuk a rendezési tételt az $(1/a, 1/b, 1/c)$ számhármasra, és azonosan rendezett önmagára.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \le \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a + b + c \le \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

8. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Ötlet. Alkalmazzuk a rendezési tétel $(a^2; b^2; c^2)$, $\left(\sqrt{bc}, \sqrt{ca}, \sqrt{ab},\right)$ ellentétesen rendezett és $\left(a^2\sqrt{a}, b^2\sqrt{b}, c^2\sqrt{c}\right)$, $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\right)$ azonosan rendezett sorozatokra.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$abc(a + b + c) \leq a^4 + b^4 + c^4.$$

Ötlet.

- Alkalmazzuk a rendezési tételt az (a^2, b^2, c^2) és (bc, ca, ab) ellentétesen rendezett, majd
- az (a^3, b^3, c^3) és (a, b, c) azonosan rendezett hármasokra. (A megfelelő rendezettséget be kell látni.)

10. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{c^2 + ab}{a + b} + \frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + bc}{b + c} \geq a + b + c.$$

Ötlet.

- Alkalmazzuk a rendezési tételt az (a^2, b^2, c^2) és $(1/(a+b), 1/(b+c), 1/(c+a))$ hogyan is rendezett(?) hármasokra, majd
- adjunk mindkét oldalhoz $ab/(a + b) + bc/(b + c) + ca/(c + a)$-t.

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{x}{y + z} + \frac{y}{x + z} + \frac{z}{x + y} \geq \frac{3}{2}.$$

Ötlet. A számlálók és a nevezők reciprokai megfelelő hármasokat alkotnak.

12. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \leq \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{c}{b}} + \frac{1}{c^3}\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Ötlet. Alkalmazzuk a rendezési tételt az $\left(\frac{1}{a^3 \cdot \sqrt{a}}, \frac{1}{b^3 \cdot \sqrt{b}}, \frac{1}{c^3 \cdot \sqrt{c}},\right)$ és $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\right)$ ellentétesen rendezett sorozatokra.

13. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{a + c} + \frac{c^2}{a + b} \geq \frac{a + b + c}{2}.$$

14. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\sqrt{\frac{a}{b + c}} + \sqrt{\frac{b}{c + a}} + \sqrt{\frac{c}{a + b}} > \frac{3}{2}.$$

Ötlet. Használjuk, hogy $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x + y}$ a pozitív számok halmazán.

15. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Ötlet. Alkalmazzuk a rendezési tételt az $(a^2, b^2, c^2), (a; b; c)$ azonosan rendezett sorozatokra.

16. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b}.$$

Ötlet. A megfelelően választott sorozatokra alkalmazott rendezési tétel mellett használjuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget is.

17. Feladat. Oldjuk meg a $150^x + 60^x + 90^x = 16^x + 81^x + 625^x$ egyenletet.

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $c_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, akkor

$$n^2 \leq (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}\right).$$

19. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c > 1$, akkor

$$a^a b^b c^c \leq a^{\frac{b+c}{2}} + b^{\frac{c+a}{2}} + c^{\frac{a+b}{2}}.$$

Ötlet.

- Vegyük a logaritmusát mindkét oldalnak.
- R-t (a, b, c) és $(\lg a, \lg b, \lg c)$??? rendezettekre.

20. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív, akkor

$$(a^a b^b c^c)^3 \geq (abc)^{a+b+c}.$$

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ és a $y_1, y_2, \dots, y_n$, pozitív, ellentétesen rendezett szám n-esek, akkor

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

22. Feladat. Igazoljuk, hogy $A_n \geq G_n$.

Csebisev-egyenlőtlenség

23. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ azonosan rendezett szám n-esek, akkor

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

(Ez a Csebisev-egyenlőtlenség.)

24. Feladat. Legyen $0 < c \leq b \leq a, 0 < x \leq y \leq z$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3 \cdot \frac{a+b+c}{x+y+z}.$$

Ötlet. Csebisev-egyenlőtlenség, majd számtani-mértani három tagra kétszer.

25. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\frac{a^n + b^n}{a+b} \geq \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}.$$

26. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, akkor

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Ötlet. $s = a + b + c$, majd Csebisev $(a; b; c), (s - a; s - b; s - c)$ ellentétesen rendezettekre.

27. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{\alpha}{s-a} + \frac{\beta}{s-c} + \frac{\gamma}{s-c} \geq \frac{3\pi}{s},$$

ahol α, β, γ a háromszög szögei, radiánban mérve.

Ötlet. Használjuk a Sz-H becslést is.

28. Feladat. Igazoljuk, hogy $H_n \leq A_n$.

29. Feladat. Igazoljuk, hogy $A_n \leq Q_n$.

30. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ és $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$, akkor

$$a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \ldots + a_n^{n+1} \geq a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n.$$

31. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}.$$