Elemi matematika 1. - MTN224g
RÁCSGEOMETRIA

1. Feladat. Igazoljuk, hogy a síkban öt rácspont közül mindig kiválasztható kettő, melyeket összekötő szakasz valamely belső pontja is rácspont.

Ötlet. Vizsgáljuk a koordináták paritását.

2. Feladat. Általánosítsuk az előző feladatot.

3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex rácskilencszögnek van három olyan csúcsa, amelyek által meghatározott háromszög súlypontja szintén rácspont.

«KöMaL B. 4077»

Megoldás. Ha három csúcspont koordinátái $A(a_1; a_2), B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$, akkor az ABC háromszög súlypontjának koordinátái

$$S\Big(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\Big).$$

Ez pontosan akkor lesz rácspont, ha a_1, b_1 és c_1 vagy mind ugyanolyan, vagy páronként különböző maradékot adnak 3-mal osztva, és ugyanígy a második koordináták is hasonló tulajdonsággal bírnak. Rendeljük hozzá az $X(x_1; x_2)$ rácsponthoz az (r_1, r_2) számpárt, ahol $r_i \in \{0, 1, 2\}$ jelöli az x_i szám 3-mal való osztásnál keletkező maradékát. Ha a rácsszögnek van 3 olyan csúcsa, amelyhez ugyanazt a számpárt rendeltük, akkor a fentiek miatt az ezek által meghatározott háromszög súlypontja rácspont lesz. Tegyük fel tehát, hogy nem ez a helyzet, vagyis minden számpárt legfeljebb 2 különböző csúcshoz rendeltük hozzá. Ekkor található 5 olyan csúcs, melyek mindegyikéhez más-más számpárt rendeltünk hozzá. Ha van három számpár, amelyben ugyanaz az első elem, akkor azokban a második elemek páronként különböznek, vagyis az ezekhez tartozó három csúcspont megfelelő lesz. Feltehető tehát, hogy a számpárok $(a, p), (a, q), (b, r), (b, s)$ és (c, t), ahol $\{a, b, c\} = \{0, 1, 2\}$. Egyszerű esetszétválasztással találunk ezek között három olyan számpárt, ahol vagy a második koordináták megegyeznek, vagy pedig a három számpár első és második koordinátái között is előfordul a 0,1,2 számok mindegyike. Ekkor ennek a három számpárnak megfelelő három csúcs által meghatározott háromszög súlypontja lesz rácspont. Tegyük fel először, hogy $p = r$ és $q = s$. Ha most $t \in \{p, q\}$, akkor találunk három számpárt, melyek mindegyikében t lesz a második koordináta, ha pedig $t \notin \{p, q\}$, akkor az $(a, p), (b, q), (c, t)$ számpárok első és második koordinátái is páronként különbözők. Ebben az esetben tehát készen vagyunk. Már csak azt az esetet kell megvizsgálnunk, amikor $p = r$ de $q \neq s$. Ekkor $t = p$ esetén az $(a, t), (b, t), (c, t)$ számpárok, $t = q$ esetén az $(a, p), (b, s), (c, q)$ számpárok, $t = s$ esetén pedig az $(a, q), (b, p), (c, s)$ számpárok alkotnak megfelelő hármast.

4. Feladat. Legfeljebb hány rácspontot tudunk felvenni a térben úgy, hogy egyik általuk meghatározott szakasz felezőpontja a se legyen rácspont?

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy rácspontot tükrözünk egy rácsszakasz felezőpontjára, akkor az rácspont lesz.

6. Feladat. Ezen eredmény felhasználásával alkossunk „saját" feladatokat.

Megoldás. Pl.: Igazoljuk, hogy ha egy paralelogramma három csúcsa rácspont, akkor a negyedik is az.

7. Feladat. Igazoljuk, hogy egy, az origón áthaladó egyenesen vagy pontosan egy, vagy végtelen sok rácspont van.

8. Feladat. A fentiek alapján igazoljuk, hogy a sík minden egyenese a következő hat csoport valamelyikébe tartozik.

(a) Meredeksége irracionális, és nem halad át rácsponton,
(b) meredeksége irracionális, és pontosan egy rácsponton halad át,
(c) meredeksége racionális, és nem halad át rácsponton,
(d) meredeksége racionális, és végtelen sok rácsponton halad át,
(e) az y tengellyel párhuzamos és nem halad át rácsponton,
(f) az y tengellyel párhuzamos és végtelen sok rácsponton halad át.

9. Feladat. Vágjuk ki a számegyenesből a $[0, 1]$ intervallumot és ragasszuk össze két végpontját, úgy, hogy egy kör keletkezzen. Ennek racionális pontjain ugrál egy nyúl. A nyúl a 0-ból indul és minden másodpercben ugyanabba az irányba, és ugyanakkorát ugrik. El tudjuk-e kapni véges sok lépésben, ha másodpercenként csak egy pontra tudunk csapdát tenni? (A nyulat csak akkor vesszük észre, ha a csapdában van.)

Ötlet. Visszatér-e oda, ahol már volt?

« Sulinet »

10. Feladat. Hány racionális koordinátájú ponton halad át egy origó középpontú

(a) $\sqrt{2}$,
(b) $\sqrt{3}$

sugarú kör?

« Sulinet »

11. Feladat*. Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész esetén van olyan kör, amely belsejében pontosan n rácspont van.

Megoldás. Legyen $P(\alpha; q)$, ahol α irracionális, q pedig olyan racionális, melynek kétszerese nem egész. Belátjuk, hogy P-től bármely két rácspont különböző távolságra van. Tegyük fel, hogy a $Q(a; b), R(c; d)$ rácspontok egyenlő távolságra vannak P-től. Ekkor a pontok távolságnégyzetét felírva, a kapott egyenletet rendezve a $2\alpha(a-c) = (b-d)(b+d-2q)+a^2-c^2$ egyenlet adódik. Ennek jobb oldala racionális, bal oldala csak akkor az, ha $a = c$ Ezt visszaírva $(b-d)(b+d-2q) = 0$ adódik, ami mivel $2q$ nem egész, csak akkor áll fenn, ha $b = d$, ami ellentmondás mert ekkor $Q = R$. Ekkor a sík rácspontjait P-től való távolságuk szerint sorba rendezve, egy P középpontú, az $n + 1$.-dik ponton átmenő kör belsejében pontosan n rácspont lesz.

12. Feladat. A nyitott első térnyolcad $(x, y, z > 0)$ hány rácspontján halad át az $S : x+y+z = 15$ egyenletű sík?

« Sulinet »

13. Feladat. Egy 2008 egység befogójú, egyenlőszárú derékszögű ABC háromszöget helyezünk el a koordináta síkon úgy, hogy a derékszög csúcsa (C) az origó legyen, és a két befogó a tengelyek pozitív félegyenesére kerüljön. Hány olyan egész koordinátájú P pont van a háromszöglemezen, amelyre PA^2, PB^2, PC^2 számok egy számtani sorozat egymást követő három tagját adják ebben a sorrendben?

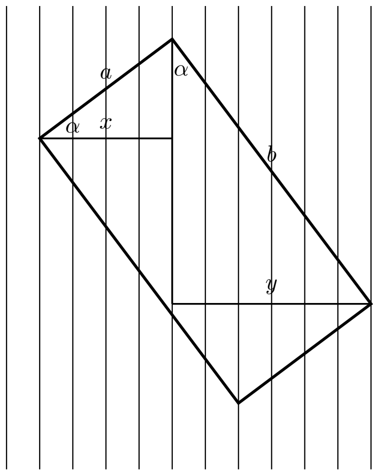
« NMMV 2007. 12/3 »

14. Feladat. Az XOY derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A\,(0, 51)$ és $B\,(78, 51)$ pontok. Létezik-e az OX tengelyen olyan M pont, melyre az MAB háromszög belsejében elhelyezkedő rácspontok száma pontosan 2002?

« NMMV, 2002, 12/2 »

15. Feladat. Vonalas füzetünkben a szomszédos egyenesek távolsága 1 egység. Létezik-e olyan téglalap, amely oldalainak hossza egész és csúcsai négy különböző vonalra illeszkednek?

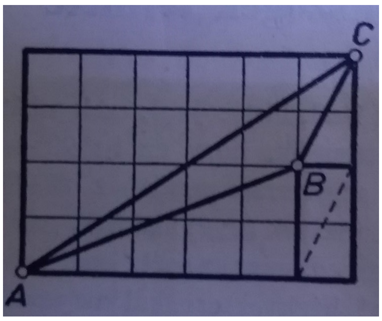
Megoldás. Az ábrán x, y egész, a két, α szöget tartalmazó derékszögű háromszög hasonló. Az $\frac{x}{a} = \cos\alpha$ és $\frac{y}{b} = \sin\alpha$ összefüggés-ben α-t úgy kell megválasztani, hogy $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ racionális legyen.



Ekkor a és b is racionális. Ha legalább egyik nem egész, akkor az a és b számokat közös nevezőre hozva, a nevezőnek megfelelő arányú C középpontú középpontos hasonlósággal a téglalapot felnagyítva egy kívánt megoldást kapunk. Meg kell mutatni, hogy van olyan α, amelyre $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ racionális. Ilyen például a $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, a 3, 4, 5 pitagoraszi számhármasból. Elképzelhető olyan megoldás is, hogy valamely pitagoraszi számhármasból spekulatív úton ad valaki megoldást (például egy 5 egység oldalán négyzetet).

16. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely rácssokszög területének a kétszerese egész.

Ötlet. Elég csak háromszögekre, mert a többi rácssokszög belőlük áll. Foglaljuk rácsháromszögünket téglalapba az alábbi ábrán látható módon.



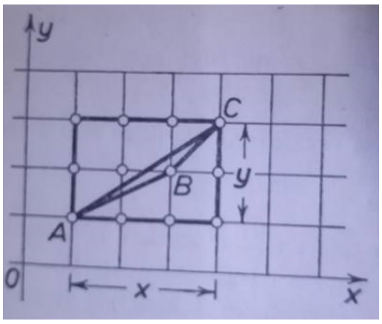
17. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely rácssokszög területe legalább 1/2.

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy rácssokszög határán h, belsejében b rácspont van, akkor a sokszög $h+2b-2$ üres rácsháromszögre (a belsejében, és a csúcsoktól eltekintve a kerületén rácspontot nem tartalmaz) bontható.

Ötlet. Számoljunk a háromszögek belső szögeinek összegével.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy minden üres rácsháromszög területe 1/2.

Ötlet. Foglaljuk háromszögünket téglalapba. Ennek területe xy, határán $2x + 2y$, belsejében $xy-x-y+1$ rácspont van, így ez az előző feladat értelmében $2x+2y-2+2(xy-x-y+1) = 2xy$ rácsháromszögre bontható.



20. Feladat. Igazoljuk, hogy egy üres rácsháromszög nem lehet hegyesszögű.

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy rácssokszög határán h, belsejében b rácspont van, akkor a sokszög területe $h/2 + b - 1$. Ez az ún. Pick-képlet.

22. Feladat. A „kockás” papíron adott egy 2005 egység oldalhosszúságú négyzet, amelynek oldalai rácsegyenesek. Rajzoljunk a négyzetbe egy olyan önmagát át nem metsző zárt töröttvonalat, amelynek minden szakasza rácsegyenes mentén halad és az összes olyan rácsponton pontosan egyszer megy át, amelyik a négyzet belsejében vagy annak határán fekszik. Mutassuk meg, hogy a töröttvonal által határolt sokszög területe nagyobb, mint a négyzet területének fele.

«KöMaL B. 3831»

23. Feladat. Igazoljuk, hogy minden üres rácsparalelogramma területe 1.

24. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs szabályos rácsháromszög (a síkban).

25. Feladat. Keressünk szabályos rácsháromszöget a térben.

26. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs a síkon szabályos rácsötszög.

27. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs szabályos rács n-szög, ha $n \geq 7$.