Elemi matematika 1. - MTN224g
Feladatok számrendszerekre

1. Feladat. Melyik az a tízes számrendszerbeli kétjegyű pozitív egész szám, amely a 8-as, a 4-es, és a 2-es számrendszerben is csupa egyforma számjeggyel írható fel?

Ötlet. A 2-es számrendszerben felírt alakból induljunk ki.

« Kalmár László Matematikaverseny, 7. évfolyam, döntő, 4. feladat. »

2. Feladat. Igazoljuk, hogy a 2-es számrendszerben minden pozitív szám boldog. (Egy pozitív egész szám boldog, ha kiszámítva számjegyeinek négyzetösszegét, majd ezt az így kapott számmal szükség szerint addig ismételve ezt, amíg egyjegyű számot nem kapunk, akkor az eredmény 1 lesz.)

3. Feladat. Keressük meg az összes olyan négyzetszámot, amely a kettes számrendszerben felírva csupa 1-es számjegyből áll.

« KöMaL C. 418. »

4. Feladat. A gondolt egy számot 1 és 2019 között. B 30 kérdést tehet fel, melyekre A igennel vagy nemmel felelhet úgy, hogy egyszer hazudhat is. Kitalálhatja-e B a gondolt számot?

Ötlet. $1024 < 2019 < 2048$.

5. Feladat. A gondolt egy számot 1 és 31 között. B 9 kérdést tehet fel, melyekre A igennel vagy nemmel felelhet úgy, hogy egyszer hazudhat is. Kitalálhatja-e B a gondolt számot?

Ötlet. Kettes számrendszer.

«Róka Sándor: Furfangos Logi-sztori»

6. Feladat. Van 4 zsákunk, mindegyikben rengeteg, rengeteg aranypénz. Tudjuk, hogy az egyik zsákban 9, a másikban 8, a harmadikban 7 grammos érmék vannak, a zsákok egyikében pedig csupa 4, vagy 5 vagy 6 grammos érme. Egyetlen digitális mérleggel egyetlen mérést végezhetünk. Hogyan tudjuk megmondani, melyik zsákban milyen tömegű érmék vannak?

«Róka Sándor: Furfangos Logi-sztori»

Ötlet. 10-es számrendszer.

7. Feladat. Félix kapott néhány doboz gumimacit, egy dobozban van csak eredeti (10 grammos) vagy csak hamisítvány (9 grammos) gumimacik vannak. Egyetlen digitális mérleggel egyetlen mérést végezhetünk. Hogyan tudjuk megmondani, melyik dobozokban vannak a hamis gumimacik?

«Róka Sándor: Furfangos Logi-sztori»

8. Feladat. Gondolj egy 31-nél nem nagyobb számra. Mondd meg, hogy mely sorszámú kártyákon szerepel és én kitalálom, hogy melyik számra gondoltál. Hogyan csinálom?

1	3	5	7
9	11	13	15
17	18	21	23
25	27	29	31

1

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

2

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

3

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

4

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

5

9. Feladat. Van-e olyan n alapú számrendszer, amelyben
(a) $275_n | 572_n$,

(b) $371_n \cdot 11_n = 4181_n$?

« Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1976., 10.osztály, 1. feladat, Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1979., 9.osztály, 3. feladat »

10. Feladat. Egy téglalap alakú sportpálya oldalainak méterben mért hosszát egy nem tízes alapú számrendszerben 101 és 230 jelöli, a téglalap méterben mért kerületének számmértéke ugyanebben a számrendszerben 1212. Hány négyzetméter a sportpálya területe ebben a számrendszerben?

11. Feladat. Állapítsuk meg, hogy a 20! hatos számrendszerben felírt alakja hány nullára végződik.

12. Feladat. Milyen számjegyeket írhatunk a hiányzóak helyére, hogy az ötös számrendszerben felírt $1 * *3*$ szám osztható legyen 20-szal?

13. Feladat. Valamilyen számrendszerben felírva egy 100 fős osztályba 32 lány és 24 fiú jár. Mekkora az osztálylétszám tízes számrendszerben?

14. Feladat. Peti észrevette, hogy a 7-et 3-mal szorozva, épp a 7 3-as számrendszerbeli alakját kapja. Elkezdett ilyen kétjegyű számokat keresni. Hányat talált, ha mindet megtalálta?

Megoldás. Nincs ilyen szám. Egy kétjegyű számot 3-mal szorozva legfeljebb háromjegyűt kaphatunk. A 3-es számrendszerben felírható legnagyobb háromjegyű szám a 222, a tízes számrendszerben 26. Így az adott kétjegyű szám legfeljebb $\frac{26}{3}$ lehetne, de ennek egészrésze egyjegyű.

15. Feladat*. Igazoljuk, hogy 6-os számrendszerben

(a) egy szám pontosan akkor osztható 2-vel, illetve 3-mal, ha az utolsó jegye osztható 2-vel illetve 3-mal,
(b) egy szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyéből álló szám osztható 4-gyel,
(c) a nem 3-ra végződő páratlan számoknak mindig van olyan többszörösük amely csupa 5-ös számjegyből áll.

Általánosítsunk, keressünk oszthatósági szabályokat más számrendszerekben is!

Megoldás.

(a) Egyszerű számolás adja a hatos számrendszerben felírt helyiértékes alakból.
(b) Egyszerű számolás adja a hatos számrendszerben felírt helyiértékes alakból.
(c) Legyen a vizsgált szám n. Mivel ez páratlan és nem 3-ra végződik, nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal. Tekintsük a $5, 55, 555, \ldots$ számokat, összesen n darabot. Azt állítjuk, hogy van köztük olyan amelyik osztható n-nel. Tegyük fel, hogy nincs. Ekkor a felsorolt számok között kell lennie legalább kettőnek amely n-nel osztva ugyanazt a maradékot adja. (Van ugyanis n szám, és mivel a 0 nem fordulhat elő összesen $n-1$ lehetséges n-nel vett osztási maradék.) Ezek két szám különbsége $55\ldots 500\ldots 0$ alakú. Ez a szám $55\ldots 5 \cdot 6^k$ alakban írható, de mivel n nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, n és 6^k relatív prímek, így $n|555\ldots 5$.

16. Feladat. Igazoljuk, hogy az n alapú számrendszerben egy szám pontosan akkor osztható $n-1$-gyel (illetve annak egynél nagyobb osztóival), ha a számjegyek összege osztható $n-1$-gyel (illetve annak egynél nagyobb osztóival).

17. Feladat. A „negadecimális” számrendszer olyan számrendszer, aminek helyi értékei a 10 hatványai, de váltakozó előjellel, azaz a tízes számrendszer 1, 10, 100, 1000 stb. helyi értékei helyett 1, -10, 100, -1000 stb. Például
$325_{-10} = 3 \cdot 100 + 2 \cdot (-10) + 5 \cdot 1 = 300 - 20 + 5 = 285_{10}$. Írjuk fel a 2016-ot negadecimális számrendszerben.

«KöMaL K. 519.»

Megoldás. $2016_{10} = 18196_{-10}$

18. Feladat. Határozzuk meg, hogy mely $n > 3$ esetén igaz az n alapú számrendszerben a következő állítás: pontosan akkor osztható egy szám 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges számrendszerben az alapot megelőző szám kétszerese és négyzete ugyanazokkal a jegyekkel írható, csak más sorrendben.

20. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet. $(\overline{ab_n})^2 = \overline{abab_n}$

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $n > 6$, akkor 14641_n négyzetszám.

22. Feladat. Igazoljuk, hogy 1331_n $(n \geq 4)$ köbszám.

23. Feladat. Igazoljuk, hogy
(a) 121_n
(b) 10201_n
(c) 10101_n sosem prím.

24. Feladat. Igazoljuk, hogy minden 3-as számrendszerbeli számnak van olyan többszöröse amelyben
(a) a 2
(b) az 1
nem szerepel.
(c) Igazoljuk, hogy ez a 0 esetén nem igaz.

Ötlet. Használjuk a **15. Feladat** megoldási módszerét.

25. Feladat. Határozzuk meg azt a háromjegyű számot, melyet a 7-es és 9-es számrendszerben is ugyanazokkal a számjegyekkel írunk le, csak fordított sorrendben.

26. Feladat. I. Kázmér halála után II. Kázmér betiltotta az 1-et, ezért a birodalmában ezentúl így számoltak: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 22, 23, \ldots$ Hogyan írják a 2004-et?

27. Feladat. Melyik az a szám, amelynek az n-alapú számrendszerben felírt alakja 503, az $(n + 2)$-alapú számrendszerben pedig 305?

28. Feladat. Milyen számjegyet írhatunk $*$ helyébe, hogy $2456*_8$ osztható legyen 4-gyel és 7-tel?

29. Feladat. Határozzuk meg a számrendszer x alapját, ha teljesül az alábbi egyenlet:

$$2016_x = x^3 + 2x + 342.$$

«KöMaL C. 1387., Matlap-Kolozsvár»

30. Feladat. Adott az $N = \overline{abc}$ tízes számrendszerbeli háromjegyű szám. Az $M = \overline{abc}$ nem tízes számrendszerbeli szám értéke $2N$. Határozzuk meg az N számot.

«KöMaL C. 1669.»

31. Feladat*. Van-e olyan számrendszer, amelyben a 9-cel való oszthatóság szabálya olyan, mint a tízes számrendszerben a 4-gyel való oszthatósági szabály; a 4-gyel való oszthatóság szabálya olyan, mint a tízes számrendszerben a 9-cel való oszthatósági szabály; a 7-tel való oszthatóság pedig pusztán az utolsó számjegy alapján eldönthető?

«KöMaL B. 4022.»

Megoldás.

- Legyen a számrendszer alapszáma d. Ha a 7-tel való oszthatóság csak az utolsó számjegy alapján eldönthető, akkor tekintsünk egy legalább kétjegyű 7-tel osztható n számot. Ha n utolsó előtti jegye 0, akkor cseréljük ki 1-re, ha nem 0, akkor vonjunk ki belőle 1-et. Az így kapott n' szám szintén osztható kell legyen 7-tel. Mivel $n' = n \pm d$, a két szám különbsége, d is osztható kell legyen 7-tel. Megfordítva, ha d osztható 7-tel, akkor nyilván minden 0-ra végződő szám osztható 7-tel, ezért egy szám pontosan akkor lesz 7-tel osztható, ha az utolsó számjegye osztható 7-tel. Az utolsó feltétel tehát pontosan akkor teljesül, ha $7 \mid d$.
- Az első feltétel azt jelenti, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha az utolsó két számjegyéből alkotott 'szám' (amely tehát 0-val is kezdődhet, sőt 00 is lehet) osztható 9-cel, de az utolsó számjegy alapján az oszthatóságot még nem lehet eldönteni. Ha ez teljesül, akkor az előző érvelés mutatja, hogy d nem osztható 9-cel. Megmutatjuk, hogy d szükségképpen osztható 3-mal. Tekintsünk egy legalább 3 jegyből álló 9-cel osztható n számot. Ha a d^2-es helyiértéken álló számjegy 0, akkor írjunk helyébe 1-et, ellenkező esetben vonjunk ki belőle 1-et. A szabály értelmében az így kapott n' szám is osztható kell legyen 9-cel. A két szám különbsége most d^2, ami pontosan akkor osztható 9-cel, ha d osztható 3-mal. Megfordítva, ha d osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, akkor az utolsó számjegy alapján a 9-cel való oszthatóságot még nem lehet eldönteni, viszont minden 00-ra végződő szám osztható lesz $3^2 = 9$-cel, tehát egy szám pontosan akkor lesz osztható 9-cel, ha a fent megfogalmazott szabály teljesül. Az első feltétel tehát azzal ekvivalens, hogy $3 \mid d$, de $9 \nmid d$.
- Végül a második feltétel azt jelenti, hogy egy szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha számjegyeinek összege osztható 4-gyel. Ha ez teljesül, akkor $d > 2$, ezért van olyan n kétjegyű 4-gyel osztható szám, amelynek első jegye nem $d-1$. Ha a második jegy 0, akkor írjunk helyébe 1-et, az első számjegyet pedig csökkentsük 1-gyel (ha így az első számjegy 0 lenne, akkor elhagyjuk). Ha a második jegy nem 0, akkor csökkentsük 1-gyel, az első számjegyet pedig növeljük 1-gyel. Így a számjegyek összege változatlan marad, tehát az új szám, $n' = n \pm (d-1)$ is osztható 4-gyel. Ezért szükségképpen $4 \mid d-1$. Megfordítva, ha d 4-gyel osztva 1 maradékot ad, akkor d minden hatványa is 1 maradékot ad 4-gyel osztva, ezért az $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}_d$ szám ugyanolyan maradékot ad 4-gyel osztva, mint $a_k +_{ak-1} + \ldots + a_1 + a_0$. A második feltétel tehát pontosan akkor teljesül, ha $4 \mid d-1$.
- Mivel a $d = 21$ szám mindhárom feltételnek eleget tesz, található ilyen számrendszer, sőt minden $252k + 21$ alapú számrendszer megfelelő lesz.