Elemi matematika 3. - MTN424g

A NEVEZETES KÖZEPEK KÖZÖTTI EGYENLŐTLENSÉGEK n TAGRA

1. Feladat. Igazoljuk, hogy $A_n \leq Q_n$.

Ötlet. Próbálkozzunk teljes indukcióval.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pozitív, akkor

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív, és $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, akkor

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3 \cdot \sqrt{3}.$$

4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c > 0$ és $abc = 1$, akkor

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Ötlet. $x = bc$ típusú helyettesítésekkel a Nesbitt-egyenlőtlenséget kapjuk, ahol $H_n \leq A_n$ összefüggéssel is dolgozhatunk.

5. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-7} + \sqrt{18-3x}$ függvény maximumát.

Ötlet. $A_n \leq Q_n$.

6. Feladat. Az x, y, z pozitív számokra $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$2^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{y}} + 2^{\frac{1}{z}} \geq 6.$$

7. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, akkor

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_3 + \ldots + x_n} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Ötlet. Legyen $a = x_1 + x_2 + \ldots + a_n$, majd $H_n \leq A_n$.

8. Feladat*. Igazoljuk, hogy ha n pozitív természetes szám, akkor

$$\sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}} < 2 \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Ötlet. Használjuk a számtani és az n-edik hatványközép közötti egyenlőtlenséget.

GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉGEK ÉS SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK

9. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói $a, b, \in \mathbb{Z}$, és az átfogóhoz tartozó magassága m, akkor

$$m \leq \frac{\sqrt[a+b]{a^a \cdot b^b}}{\sqrt{2}}.$$

Ötlet. Bizonyítsuk majd használjuk, hogy $m = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10. Feladat. Egy egység oldalú szabályos n-szög egy P belső pontja a sokszög oldalaitól rendre $d_1, d_2, \ldots, d_n$ távolságra van. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} > 2\pi.$$

11. Feladat. Határozzuk meg az 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyben minimális az oldalakra írható négyzetek területének összege.

12. Feladat. Határozzuk meg a $d = 2 \cdot \sqrt{3}$ testátlójú téglatestek közül a maximális térfogatút.

13. Feladat. Adott élösszegű téglatestek közül melyiknek a

(a) térfogata,
(b) felszíne

a legnagyobb?